ZEITSCHRIFT

FÜR

PHYSIK UND MATHEMATIK.

I.

Über die gleichbeleuchteten Linien der Oberflächen, nach einem italienischen Mémoire des *Antonio Bordoni*;

von

Gustav Adolph Greisinger,

Hauptmanne im k. k. Ingenieurs - Corps.

---

§. 1. Die Stärke der Beleuchtung, welche durch gleichlaufend einfallende Lichtstrahlen auf der Oberfläche der Körper hervorgebracht wird, hängt von der Gröſse des Einfallswinkels ab; das ist: von der Gröſse des Winkels, welchen der einfallende Lichtstrahl mit der tangirenden Ebene der Oberfläche bildet.

Gleichbeleuchtet sind also alle Puncte einer Oberfläche, an denen die berührenden Ebenen gleiche Winkel mit einer der Lichtstrahlrichtnng gleichlaufend gezogenen Geraden machen. Die Vereinigungen aller jener Puncte bilden auf der Oberfläche die gleichbeleuchteten Linien.

Um dieser Abhandlung, über die Bestimmung der gleichbeleuchteten Linien auf gegebenen Oberflächen, jene Allgemeinheit zu verschaffen, ohne welche Klarheit nie denkbar ist; werden wir zuvörderst die allgemeine Gleichung dieser Linien entwickeln, sie sodann auf die Kugeloberfläche, und auf die durch Umdrehung eines verticalen Halbkreises um eine ebenfalls verticale

Achse entstandene Fläche (den Pfuhl) anwenden, und endlich zu den Flächen übergehen, die überhaupt durch Umdrehung um eine verticale Achse entstanden sind. Einige Bemerkungen über die gleichbeleuchteten Linien jener Oberflächen durch Umdrehung um eine horizontale, oder gegen das darstellende Coordinatensystem schiefe Achse, bilden den Schlufs dieser Abhandlung.

Die Grundlage ihres analytischen Theils bilden jene bekannten allgemeinen Formeln der analytischen Geometrie im Raume, deren Ableitung man in den Werken eines *Lacroix*, *Biot*, *Hachette* und anderer nachschlagen kann.

§. 2. Die drei coordinirten Ebenen, auf die wir uns die Puncte der Linien und Flächen übertragen vorstellen, sind so angenommen, dafs die eine horizontal, die zweite vertical und dem Leser gegenüber, die dritte endlich ebenfalls vertical, und auf die beiden ersten senkrecht ist. Die erste dieser Ebenen heifse Ebene der Grundrisse, die zweite jene der Aufrisse, die dritte endlich Ebene der Seitenansichten.

Die drei Coordinirten eines jeden Punctes der Oberfläche werden wir mit z, x, y bezeichnen, und zwar mit z den verticalen Abstand desselben von der Ebene der Grundrisse, mit x den horizontalen Abstand von der Ebene der Seitenansichten (nach der rechten Hand hin), mit y endlich jenen von der Ebene der Aufrisse, von dem Leser hinweggerechnet.

Die entsprechenden Coordinaten irgend eines Punctes der gegebenen Richtung des Lichtstrahls seyen r, p, q.

Diefs vorausgesetzt, sey die Gleichung der gegebenen Oberfläche $F(x, y, z) = 0$, und die Gleichungen des Aufrisses und der Seitenansicht der durch den Ursprung der coordinirten Ebenen geführten Lichtstrahl-

richtung $p + ar = 0$ und $q + br = 0$, in denen a und b die Cotangenten der Winkel sind, welche der Aufrifs und die Seitenansicht dieser Richtung, Fig. 16, mit der Achse der x und der y auf der linken Seite bilden, so dafs, wenn mn den Aufrifs oder die Seitenansicht der Richtung des Lichtstrahls vorstellt, Cotangente som beziehungsweise $= a$ oder $= b$ wird.

In jedem Puncte der Oberfläche wird der einfallende Lichtstrahl mit der Normale dieses Punctes einen Winkel bilden, der das Complement von jenem ist, den er mit der tangirenden Ebene macht. Ist daher der Einfallswinkel der zu suchenden gleichbeleuchteten Linie gegeben, so handelt es sich nur darum, einen Ausdruck für eine trigonometrische Function des Winkels zu finden, den die Lichtstrahlrichtung an irgend einem Puncte der Oberfläche mit der Normale eben dieses Punctes bildet, und diesen dann der entsprechenden Cofunction des Einfallswinkels π gleich zu setzen, um aus der so entstandenen Gleichung eine neue Beziehung der Coordinaten x, y, z der Puncte der gesuchten Linie herzuleiten.

Es seyen nun durch irgend einen Punct der Oberfläche, die uns durch die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ gegeben ist, zwei gleichlaufende Ebenen mit jenen der Aufrisse und der Seitenansichten geführt, welche die Oberfläche in zwei Krummen, die tangirende Ebene aber in den Tangenten zu diesen Krummen schneiden; endlich sey die Normale zu dem angenommenen Puncte gezogen.

Sowohl der Aufrifs als die Seitenansicht der beiden Tangenten und der Normale werden zu den Aufrissen und den Seitenansichten der beiden Krummen, deren Gleichungen $F(x, y, z) = 0$ für ein beständig angenommenes y, und $F(x, y, z) = 0$ für ein beständiges x

sind, Tangenten und Normale seyn. Der Aufriſs der Normale und ihre Seitenansicht bilden daher mit der Achse der x und der y (auf der linken Seite) Winkel, deren Cotangenten wir erhalten, wenn wir den aus der Gleichung $F(x, y, z) = 0$ geschöpften Werth von z einmal in Beziehung auf x, das andere Mal in Beziehung auf y differenziren, und im ersten Falle mit dx, im letzten mit dy dividiren. Das heiſst, sie sind beziehungsweise $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$.

Die Gleichungen der Normale irgend eines Punctes der Oberfläche, dessen Coordinaten x, y, z sind, werden also

$$p - x + \frac{dz}{dx}(r - z) = 0 \text{ und } q - y + \frac{dz}{dy}(r - z) = 0,$$

und der Cosinus des Winkels, den sie mit der Lichtstrahlrichtung bildet:

$$= \frac{1 + a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy}}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}.$$

Das gleichzeitige Bestehen der Gleichung

$$\frac{1 + a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy}}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}} = \sin.\pi$$

mit jener der Oberfläche $F(x, y, z) = 0$, charakterisirt demnach vollkommen die Natur der unter einem gegebenen Winkel π beleuchteten Linien.

§. 3. Wenn wir die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ (indem wir y als beständig, also z als Function von x allein ansehen) in Bezug auf x differenziren, so wird

$$\frac{d \cdot F(x, y, z)}{dx} + \frac{d \cdot F(x, y, z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 0$$

$$\text{und}\quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{d\,.\,F(x,y,z)}{dx}}{\frac{d\,.\,F(x,y,z)}{dz}};$$

und eben so wird, wenn wir x als beständig, z also als Function von y allein betrachten, und in Beziehung auf y differenziren:

$$\frac{d\,.\,F(x,y,z)}{dy} + \frac{d\,.\,F(x,y,z)}{dz}\,.\,\frac{dz}{dy} = 0$$

$$\text{und}\quad \frac{dz}{dy} = -\frac{\frac{d\,.\,F(x,y,z)}{dy}}{\frac{d\,.\,F(x,y,z)}{dz}}.$$

Die Bedingungsgleichungen gleichbeleuchteter Linien lassen sich also auch so schreiben:

$$F(x,y,z) = 0 \quad \text{und}$$

$$\left[\frac{d\,.\,F(x,y,z)}{dz} - a\,\frac{d.F(x,y,z)}{dx} - b\,\frac{d.F(x,y,z)}{dy}\right]^2$$
$$-(1+a^2+b^2)\left[\left(\frac{d\,.\,F(x,y,z)}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d.F(x,y,z)}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\,.\,F(x,y,z)}{dz}\right)^2\right]\sin.^2\pi = 0.$$

Wir werden uns bald dieser, bald jener im §. 2. angeführten Gleichung bedienen.

§. 4. Wenn die Lichtstrahlen die in der Zeichenkunst gebräuchliche Richtung haben, so wird $a = b = 1$, und die beiden Bedingungsgleichungen werden

$$F(x,y,z) = 0 \quad \text{und}$$

$$\left[\frac{d\,.\,F(x,y,z)}{dz} - \frac{d\,.\,F(x,y,z)}{dx} - \frac{d\,.\,F(x,y,z)}{dy}\right]^2$$
$$-3\left[\left(\frac{d\,.\,F(x,y,z)}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\,.\,F(x,y,z)}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\,.\,F(x,y,z)}{dz}\right)^2\right]\sin.^2\pi = 0.$$

Ist aber $\pi = 90^\circ$, mithin $\sin.\pi = 1$ angenommen, so

erhalten wir für jene Puncte, in denen die Lichtstrahlen der Richtung der Normale folgen, aus §. 2.:

$$\left[1 + a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy}\right]^2$$
$$- (1 + a^2 + b^2)\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right] = 0,$$

welcher Gleichung die Werthe $a = \frac{dz}{dx}$ und $b = \frac{dz}{dy}$ entsprechen, wie diess vorauszusehen war.

Wäre hingegen $\pi = 0$, so verwandeln sich die Bedingungsgleichungen der gleichbeleuchteten Linien in jene des eignen Schattens der Oberfläche. Diese letztern sind auch, wie bekannt:

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{und}$$
$$1 + a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} = 0,$$
$$\text{oder} \quad F(x, y, z) = 0 \quad \text{und}$$
$$\frac{d.F(x, y, z)}{dz} - a\frac{d.F(x, y, z)}{dx} - b\frac{d.F(x, y, z)}{dy} = 0.$$

§. 5. Gehen wir nunmehr zu den gleichbeleuchteten Linien der Kugeloberfläche über. Für diese wird

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - m^2 = 0,$$

wenn wir den Ursprung der Coordinaten im Mittelpuncte derselben voraussetzen, und m ihren Halbmesser bedeutet.

Ferner wird

$$\frac{d.F(x, y, z)}{dx} = 2x, \quad \frac{d.F(x, y, z)}{dy} = 2y, \quad \frac{d.F(x, y, z)}{dz} = 2z.$$

Wir erhalten also als Bedingungsgleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 - m^2 = 0 \quad \text{und}$$
$$(z - ax - by)^2 - (1 + a^2 + b^2)(x^2 + y^2 + z^2)\sin.^2\pi = 0,$$

oder, $(\sqrt{1 + a^2 + b^2})\sin.\pi$ Kürze halber $= s$ gesetzt:

$$(z - ax - by)^2 - s^2(x^2 + y^2 + z^2) = 0:$$

und da $x^2 + y^2 + z^2 = m^2$ ist:

$$(z - ax - by)^2 = s^2 m^2, \quad \text{und endlich}$$

$$z - ax - by \mp ms = 0.$$

Diese letztere Gleichung ist vom ersten Grade, gehört daher zu einer Ebene; ihr Durchschnitt mit der Kugeloberfläche bestimmt die gleichbeleuchteten Linien, die mithin Kreise sind. Vergleichen wir die Gleichung des Lichtstrahls $p + ar = 0$ und $q + br = 0$ mit jener der Ebene, deren Gleichung

$$z - ax - by \mp ms = 0$$

ist, so finden wir, dafs letztere auf erstere senkrecht ist. In der That, wenn die Gleichung einer geraden Linie $x + ar = 0$ und $y + br = 0$, jene der Ebene aber $Ax + By + Cz + D = 0$ sind, so durchschneiden sie sich senkrecht, wenn $A = -aC$ und $B = -bC$ ist, welche Bedingungen in dem vorliegenden Falle erfüllt sind. Die gleichbeleuchteten Linien einer Kugeloberfläche sind also Kreise, die ihren Mittelpunct in der durch den Mittelpunct der Kugel gezogenen Lichtstrahlrichtung haben.

Die Gleichung $z - ax - by \mp ms = 0$, oder die beiden $z - ax - by - ms = 0$ und $z - ax - by + ms = 0$, zeigen uns ferner, dafs jedem Werthe des Winkels π zwei Ebenen entsprechen, von denen die erste die Achse der z auf der bejahenden, die zweite aber auf der verneinenden Seite schneidet, da für x und $y = 0$, z im ersten Falle $= + ms$, im zweiten $= - ms$ wird. Der Abstand dieser Ebenen vom Mittelpuncte der Kugel ist, wenn wir die eben angeführte allgemeine Gleichung gelten lassen, $\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, also für unsern Fall

$$= \frac{\pm ms}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} = \pm \frac{m \cdot \sqrt{1 + a^2 + b^2} \cdot \sin. \pi}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} = \pm m \sin. \pi.$$

Der einfallende Lichtstrahl bildet also auch an den Puncten der Durchschnitte dieser beiden Ebenen mit der Kugeloberfläche, mit den tangirenden Ebenen zu derselben, auf der nämlichen Seite, Winkel, die mit einander 180° machen. Lassen wir daher die Lichtstrahlen, von der bejahenden Seite der z gegen die verneinende gerichtet, gehen, so entspricht die Gleichung $z - ax - by - ms$ der gleichbeleuchteten Linie, während die Gleichung $z - ax - by + ms$ dann gilt, wenn der Lichtstrahl in gerade entgegengesetzter Richtung angenommen wird.

Beide Voraussetzungen vereinigen sich in den Bedingungsgleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 - m^2 = 0 \quad \text{und}$$
$$z - ax - by - ms = 0,$$

vorausgesetzt, daſs s sowohl bejahend als verneinend genommen werden kann.

§. 6. Unter Voraussetzung der gebräuchlichen Lichtstrahlrichtung wird $a = b = 1$ und $s = \sqrt{3} \sin. \pi$; die gleichbeleuchteten Linien der Kugel sind dann durch die Gleichungen

$x^2 + y^2 + z^2 - m^2 = 0$ und $z - x - y - m\sqrt{3} \sin. \pi = 0$ dargestellt. Setzen wir hingegen $\pi = 0$, so verwandeln sich jene Gleichungen in die des eigenen Schattens der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 - m^2 = 0$ und $z - ax - by = 0$.

§. 7. Wir werden uns vorzüglich nur mit dem Aufrisse und Grundrisse der gleichbeleuchteten Linien der Kugel unter der gebräuchlichen Lichtstrahlrichtung beschäftigen. Wir erhalten den Aufriſs derselben, wenn wir aus den beiden Gleichungen $x^2 + y^2 + z^2 - m^2 = 0$ und $z - x - y - m\sqrt{3} \sin. \pi = 0$, y eliminiren.

So finden wir für denselben

$$z^2 - xz + x^2 - (z - x)\, m\sqrt{3} \sin. \pi - \frac{m^2}{2} (1 - 3 \sin.^2 \pi) = 0.$$

Diese Gleichung ist offenbar jene einer Ellipse, wie diefs leicht vorauszusehen war. Ihre nähern Eigenschaften können aus dieser Gleichung leicht entwickelt werden. Zuvörderst wollen wir dieser aber eine einfachere Gestalt geben, indem wir das System der Coordinaten x und z in ein anderes der t und u übertragen, deren Richtungen mit jener der Achsen x, z Winkel von 45 Graden bilden. Durch diese Uebertragung wird augenscheinlich $x = \frac{t-u}{\sqrt{2}}$ und $z = \frac{t+u}{\sqrt{2}}$.

Diese Werthe, in obige Gleichung gesetzt, geben:

$$t^2 + 3u^2 - 2m\sqrt{6}\,\sin.\pi - m^2(1 - 3\sin.^2\pi) = 0 \text{ oder}$$

$$t^2 + (u\sqrt{3} - m\sqrt{2}\,\sin.\pi)^2 - m^2\cos.^2\pi = 0,$$

aus welcher Gleichung wir mit mehr Leichtigkeit alle Eigenschaften der durch sie dargestellten Ellipsen entwickeln werden.

§. 8. Betrachten wir zuerst den Fall, wo $\pi = 0$, so erhalten wir für den Aufrifs des eignen Schattens der Kugel $t^2 + 3u^2 - m^2 = 0$ die Gleichung einer Ellipse in Bezug auf die Hauptachsen. Die eine halbe Achse finden wir, indem wir $u = 0$ setzen, $= \pm m$, die andere aber für $t = 0$ gleich $\pm \frac{m}{\sqrt{3}}$. Diese Ellipse hat also ihre gröfsere Achse in jener der t, und gleich dem Durchmesser der Kugel, ihre kleinere aber in jener der u; das dreifache Quadrat dieser letztern endlich ist dem Quadrate des Halbmessers der Kugel gleich. Die geometrische Construction jener kleinern Achse, und durch sie auch die des Aufrisses des eignen Schattens der Kugel, unterliegt nunmehr keiner Schwierigkeit.

Fig. 17. Stellt nämlich der Kreis $ABED$ den Aufrifs der Kugel, und Ox die Achse der x vor, in welcher sich die Ebenen der Aufrisse und Grundrisse schneiden, die Linien uOE und tOC die beiden Achsen der u und

t, und man macht die Sehne BG dem Halbmesser BO des Kreises gleich, zieht endlich die Linien CG, so schneiden diese auf der Linie uOE in HH die kleinere Achse der gesuchten Ellipse ab, deren gröſsere Achse der Durchmesser BC selbst ist.

In der That geben die ähnlichen Dreiecke COH und BCG

$$BG : BC = HO : CH\ (2HO),$$

und das rechtwinklige Dreieck CHO

$$\overline{CH}^2 - \overline{HO}^2 = \overline{CO}^2, \quad \text{oder}$$
$$3HO^2 = m^2 \quad \text{und} \quad 3HH^2 = 4m^2.$$

§. 9. Nehmen wir $\pi = 90^0$, so finden wir für den Aufriſs der nach der Richtung der Normale, mithin am stärksten beleuchteten Linie der Kugel

$$t^2 + (u\sqrt{3} - m\sqrt{2})^2 = 0,$$

aus welcher nachfolgende Werthe sich ergeben:

$$t = 0 \quad \text{und} \quad u\sqrt{3} = m\sqrt{2},$$

die offenbar einem Puncte entsprechen, welcher in der Achse der u, und von dem Mittelpuncte des Kreises $ABED$ aufwärts um $m\sqrt{\frac{2}{3}}$ entfernt liegt.

Für die entgegengesetzte Richtung der Lichtstrahlen ergibt sich der Aufriſs des *leuchtenden* Punctes auf der entgegengesetzten Seite des Mittelpunctes der Kugel, von diesem ebenfalls um $m\sqrt{\frac{2}{3}}$ entfernt.

Wirklich hätte die Gleichung

$$t^2 + (u\sqrt{3} - m\sqrt{2})^2 = 0$$

die Gestalt $t^2 + (u\sqrt{3} \mp \sqrt{2})^2 = 0$ angenommen, wenn wir bei der Elimination von y aus den Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 - m^2 = 0 \text{ und } z - x - y - m\sqrt{3}\,\sin.\pi = 0$$

darauf Rücksicht genommen hätten, daſs $\sqrt{3}\,\sin.\pi = s$ sowohl verneinend als bejahend seyn kann.

Zur Bestimmung dieser beiden leuchtenden Puncte der Kugel dient folgende Construction.

Fig. 17. Sind die Puncte *HH* nach der vorhin angeführten Art bestimmt, so nehme man $HF = OB =$ dem Halbmesser der Kugel. Der aus dem Mittelpuncte *O* mit dem Halbmesser *OF* beschriebene Kreis schneidet dann auf der Achse *AE* der *u* die gesuchten beiden Puncte *II* ab. Man sieht leicht, daſs *OI* zugleich die Excentricität des Aufrisses des eignen Schattens der Kugel ist, den wir in §. 8. bestimmten.

§. 10. Gehen wir nun zu den Aufrissen jener gleichbeleuchteten Linien der Kugel über, an deren Puncten der Einfallswinkel weder $= 0$ noch $= 90°$ ist.

Aus der Gleichung

$$t^2 + (u\sqrt{3} - m\sqrt{2}\ \sin.\pi)^2 - m^2 \cos.^2 \pi = 0,$$

welche für senkrechte Coordinaten gilt, die ihren Ursprung im Mittelpuncte der Kugel haben, erhellt, daſs die durch sie dargestellten Ellipsen ihre Mittelpuncte in der Geraden *AE*, eine Achse in eben dieser Geraden, die andere auf diese senkrecht haben.

Nennen wir die Hälfte dieser letztern Achse *A*, die Hälfte der andern *B*, die Entfernung des Mittelpunctes einer der Ellipsen von jenem der Kugel *a*, jene endlich der beiden Durchschnitte der Ellipse mit der Achse *B* von dem Mittelpuncte der Kugel b' und b''.

Zuvörderst gibt die Gleichung

$$t^2 + (u\sqrt{3} - m\sqrt{2}\ \sin.\pi)^2 - m^2 \cos.^2 \pi = 0$$

für den gröſsten Werth von *t*, $u\sqrt{3} - m\sqrt{2}\ \sin.\pi = 0$, folglich wird $a = m\ \sin.\pi\sqrt{\tfrac{2}{3}}$, und der entsprechende Werth von $t = A = \pm\ m \cos.\pi$. Die Werthe b' und b'' gibt uns die Gleichung

$$t^2 + (u\sqrt{3} - m\sqrt{2}\ \sin.\pi)^2 - m^2 \cos.^2 \pi = 0,$$

wenn wir darin $t = 0$ setzen. b' wird also gleich

$$\frac{m}{\sqrt{3}} (\sqrt{2} \sin.\pi + \cos.\pi) \quad \text{und}$$

$$b'' = \frac{m}{\sqrt{3}} (\sqrt{2} \sin.\pi - \cos.\pi).$$

Die kleinere Achse der Ellipse ist aber offenbar $b' - b''$, folglich ist

$$2B = \frac{2m \cdot \cos.\pi}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad B = \frac{m \cdot \cos.\pi}{\sqrt{3}},$$

und es verhält sich in jeder dieser Ellipsen:

$$A : B = m \cos.\pi : \frac{m}{\sqrt{3}} \cos.\pi = \sqrt{3} : 1.$$

Die Aufrisse der unter was immer für einem Winkel gleichbeleuchteten Linien der Kugel sind demnach unter sich ähnliche Ellipsen.

Betrachten wir die Werthe von $a = m \sin.\pi \sqrt{\tfrac{2}{3}}$, $A = m \cos.\pi$ und $B = m \cos.\pi \sqrt{\tfrac{1}{3}}$, so lehren sie uns, daſs diese Ellipsen immer gröſser werden, je mehr ihre Mittelpuncte sich jenem der Kugel nähern, und daſs die gröſste unter ihnen der im §. 8. bestimmte eigene Schatten, die kleinste hingegen der im §. 9. angeführte leuchtende Punct der Kugel im Aufrisse ist.

§. 11. Die Construction der in Rede stehenden Ellipsen wird durch den Umstand sehr erleichtert, daſs der geometrische Ort ihrer Brennpuncte einem höchst einfachen Gesetze unterliegt. In der That, wenn wir E die Excentricität der Ellipsen nennen, wodurch

$$E^2 = A^2 - B^2 = m^2 \cos.^2\pi - \frac{m^2}{3} \cos.^2\pi = \frac{2m^2}{3} \cos.^2\pi$$

$$\text{und} \quad E = m \cos.\pi \sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

wird, so dient diese Gleichung im Vereine mit der früher gefundenen $a = m \sin.\pi \sqrt{\tfrac{2}{3}}$, die Gröſsen $\sin.\pi$ und $\cos.\pi$ zu eliminiren. Es folgt dann aus dieser letztern Gleichung

$$a^2 = \tfrac{2}{3} m^2 \sin.^2\pi \quad \text{oder}$$

$$a^2 = \tfrac{2}{3} m^2 - \tfrac{2}{3} m^2 \cos.^2 \pi, \quad \text{und}$$
$$a^2 + E^2 = \tfrac{2}{3} m^2.$$

Die Brennpuncte der Aufrisse aller unter der gewöhnlichen Lichtstrahlrichtung gleich beleuchteten Linien der Kugel liegen daher in dem Umfange eines Kreises, der mit dem Aufrisse der Kugel concentrisch ist, und durch jenen ihres leuchtenden Punctes geht.

Theilen wir den Werth von a durch jenen von E, so erhalten wir

$$\frac{a}{E} = \frac{m \sin. \pi \sqrt{\tfrac{2}{3}}}{m \cos. \pi \sqrt{\tfrac{2}{3}}} = \text{tang. } \pi.$$

Allein $\frac{a}{E}$ ist auch zugleich die Tangente des Winkels, den die Achse der t mit den nach den Brennpuncten der Ellipsen gezogenen Linien bildet. Dieser Winkel ist also dem der Ellipse entsprechenden Einfallswinkel der Lichtstrahlen gleich.

§. 12. Fig. 18. Mit Hülfe der eben entwickelten Eigenschaften wird es nun leicht, die Aufrisse der gleichbeleuchteten Linien der Kugel für jeden gegebenen Einfallswinkel π zu construiren.

Machen wir nämlich den Winkel WOF gleich dem gegebenen π, ziehen die MHG senkrecht auf AE, die FG von dem Durchschnitte der OF mit dem Aufrisse $AWEC$ der Kugel senkrecht auf die MHG, und machen endlich $HQ = MG$, so wird M der Mittelpunct, H ein Brennpunct, MG die eine, und MQ die andere halbe Achse der gesuchten Ellipse.

§. 13. Wenn wir die Gleichung des Aufrisses der gleichbeleuchteten Linien der Kugel für die gewöhnliche Lichtstrahlrichtung

$$t^2 + 3u^2 - m^2 - 2cum\sqrt{6} + 3c^2 m^2 = 0,$$

in welcher die willkührliche Beständige c statt des Sinus des Einfallswinkels π gesetzt ist, in Bezug auf t und u

differenziren, so erhalten wir

$$2t\,dt + 6u\,du - 2du\,.\,c\,.\,m\sqrt{6} = 0 \quad \text{oder}$$

$$\frac{2t\,dt}{du} + 6u - 2c\,.\,m\sqrt{6} = 0,$$

mit deren Hülfe wir a eliminiren können. So wird

$$c = \frac{2t\,dt}{2m\sqrt{6}\,.\,du} + \frac{6u}{2m\sqrt{6}} = \frac{t\,dt}{m\sqrt{6}\,.\,du} + \frac{3u}{m\sqrt{6}} \quad \text{und}$$

$$c^2 = \frac{t^2\,dt^2}{6m^2\,.\,du^2} + \frac{9u^2}{6m^2} + \frac{tu\,.\,dt}{m^2\,.\,du}.$$

und die obige Gleichung verwandelt sich in

$$t^2 + 3u^2 - m^2 + \frac{tu\,dt}{du} - \frac{3u^2}{2} + \frac{t^2\,dt^2}{2du^2} = 0,$$

deren allgemeine Integralgleichung jene

$$t^2 + 3u^2 - m^2 - 2cum\sqrt{6} + 3c^2m^2 = 0$$

ist. Es läſst sich aber, wie bekannt, aus dieser letztern Gleichung eine andere ableiten, welche der nämlichen Differenzialgleichung entspricht, ohne die willkürliche Beständige c zu enthalten. Man findet sie, wenn man den Ausdruck

$$t^2 + 3u^2 - m^2 - 2cum\sqrt{6} + 3c^2m^2$$

in Bezug auf c differenzirt, dieses Differenziale $= 0$ setzt, und mittelst der so gefundenen Gleichung c eliminirt. So wird

$$-2dc\,.\,um\sqrt{6} + 6c\,dc\,m^2 = 0,$$

$$6cm^2 = 2um\sqrt{6},$$

$$c = \frac{2u}{m\sqrt{6}}, \quad c^2 = \frac{4u^2}{6m^2} = \frac{2u^2}{3m^2},$$

und endlich

$$t^2 + 3u^2 - m^2 - 4u^2 + 2u^2 = t^2 + u^2 - m^2 = 0,$$

welche Gleichung der oben erwähnten Differenzialgleichung auch wirklich genügt. Allein jeder Punct der durch diese particulare Integralgleichung dargestellten Linie ist ein Berührungspunct mit einer der unzähligen

Linien, welche die allgemeine Integralgleichung durch willkürliche Annahme der Beständigen c gibt; die durch die Gleichung $t^2 + u^2 - m^2 = 0$ ausgedrückte Krumme muſs also eine groſse Zahl der durch die Gleichung

$$t^2 + 3u^2 - m^2 - 2aum\sqrt{6} + 3a^2m^2 = 0$$

dargestellten Krummen tangirend umfassen

In der That schlieſst der Kreis $ACEW$ alle in Rede stehenden Ellipsen ein, und tangirt einen groſsen Theil derselben.

§. 14. Suchen wir nun, welche von den Ellipsen (Aufrisse der gleichbeleuchteten Linien der Kugel) den Kreis $AWEC$ berühren, und in welchen Puncten dieſs geschieht. Nennen wir die Abscissen und Ordinaten der Berührungspuncte, in dem Systeme der t und u, t' und u', so wird für sie $t'^2 + u'^2 - m^2 = 0$, und zugleich

$$t'^2 + 3u'^2 - m^2 - 2m\sqrt{6}\,u' \sin.\pi + 3m^2 \sin.^2\pi = 0,$$

aus denen unmittelbar

$$u' = m \sin.\pi \sqrt{\tfrac{2}{3}} \text{ und } t' = m\sqrt{(1 - \tfrac{3}{2}\sin.^2\pi)} \text{ folgt.}$$

Dieser letztere Werth zeigt uns, daſs diese Ellipsen den Kreis $AWEC$ in zwei demselben u' entsprechenden Puncten tangiren, so lange $1 > \frac{3}{2}\sin.^2\pi$ oder $\frac{2}{3} > \sin.^2\pi$, und $\sin.\pi < \sqrt{\frac{2}{3}}$; in einem einzigen Puncte, wenn $1 = \frac{3}{2}\sin.^2\pi$ oder $\sin.\pi = \sqrt{\frac{2}{3}}$; in keinem Puncte endlich, wenn $1 - \frac{3}{2}\sin.^2\pi < 0$ oder $\sin.\pi > \sqrt{\frac{2}{3}}$ ist.

§. 15. Setzen wir in den im §. 10. gefundenen Werthen von A, B, E, a, b'' statt $\sin.\pi$ den Werth $\sqrt{\frac{2}{3}}$, und folglich statt $\cos.\pi$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$, so erhalten wir für die kleinste der Ellipsen, welche den Kreis $AWEC$, und zwar nur in einem Puncte berührt:

$$A = \frac{m}{\sqrt{3}},\quad B = \frac{m}{3},\quad E = \frac{m}{3}\sqrt{2} \text{ und } b'' = \frac{m}{3}.$$

Diese Werthe lehren uns folgende merkwürdige Beziehungen. Der erste, daſs die ST halbe groſse Achse

dieser Ellipse der halben kleinen Achse des im §. 8. angeführten eignen Schattens der Kugel gleich ist; der zweite, daſs der Mittelpunct S dieser Ellipse von dem Berührungspuncte A um ein Drittheil des Halbmessers AO entfernt ist; der dritte, daſs die Excentricität derselben dem Drittheile der Sehne des Viertelkreises AW gleicht; der vierte endlich, daſs die Entfernung $o\nu$ des Durchschnittes ν der Ellipse mit dem Durchmesser AE von dem Mittelpuncte der Kugel der halben kleinen Achse jener Ellipse gleicht, welche der Aufriſs des eignen Schattens der *hohlen* Halbkugel $AWEC$ bei der gewöhnlichen Lichtstrahlrichtung ist.

§. 16. Da wir in den §. 10. und 14. $a = m \sin. \pi \sqrt{\frac{2}{3}}$ und $u' = m \sqrt{\frac{1}{2}} \sin. \pi$ gefunden haben, so wird
$a : u' = m \sin. \pi \sqrt{\frac{2}{3}} : m \sin. \pi \sqrt{\frac{1}{2}} = 2 : 3$ oder $2u' = 3a$; und es unterliegt nunmehr keiner Schwierigkeit, eine dieser Gröſse durch die andere zu construiren. Wäre z. B. a (die Entfernung des Mittelpunctes der Ellipse von jenem der Kugel) gegeben, und u', die den beiden Berührungspuncten mit dem Kreis $AWEC$ entsprechende Abscisse zu bestimmen; so gibt die Hälfte von OM, von M gegen A getragen, in L den gesuchten Werth von u', und die von L auf AO gezogene Senkrechte NB bestimmt in ihren Durchschnitten N, B mit dem Kreise $AWEC$ die beiden Berührungspuncte mit eben diesem Kreise.

§. 17. Wäre hingegen u' gegeben, oder mit andern Worten die Puncte B, N, in denen der Aufriſs der gleichbeleuchteten Linie den Kreis $AWEC$ berühren soll, so findet man den Mittelpunct der Ellipse, ihre beiden Achsen, und die Excentricität derselben durch folgende einfache Construction.

Man ziehe BL senkrecht auf den Durchmesser AE, mache LM gleich einem Drittel von LO, so wird M der

gesuchte Mittelpunct. Man ziehe ferner MHG ebenfalls senkrecht auf AE, so geben die Durchschnitte dieser Geraden mit dem aus dem Mittelpuncte O durch die Aufrisse der beiden leuchtenden Puncte l, l geführten Kreise die Brennpuncte, und MH die Excentricität der gesuchten Ellipse. Endlich ziehe man OHF, und aus dem Puncte F, FG senkrecht auf die Verlängerung von MH, und schneide aus H mit dem Halbmesser GM die Gerade OE in Q, so wird MG die halbe erste, MQ aber die halbe zweite Achse derselben Ellipse.

Überhaupt dienen die früher für a, A, B, E, b', b'', u' und t' gefundenen Werthe dazu, aus einem derselben alle andern zu bestimmen, wenn man ihnen noch die aus den Werthen von A, B und E folgende Gleichung $\sqrt{A^2 + B^2} = E\sqrt{2}$ beigesellt, in Folge welcher die Sehne der Viertelellipse der Diagonale eines Quadrates gleicht, dessen Seite die Excentricität der Ellipse ist.

§. 18. Unter den unzähligen Ellipsen, welche die Aufrisse der gleichbeleuchteten Linien der Kugel vorstellen, gibt es zwei, welche die Achsen Ox und Oz der in dieser Abhandlung früher erwähnten Coordinaten x und z tangirend berühren. Um sie zu bestimmen, kehren wir zu der Gleichung dieser Ellipsen für jenes Coordinatensystem zurück. Sie ist §. 7.:

$$z^2 - xz + x^2 - (z-x)\, m\sqrt{3}\,\sin.\pi - \frac{m^2}{2}(1 - 3\,\sin.^2\pi) = 0.$$

Jede der unzähligen durch diese Gleichung dargestellten Ellipsen schneidet die Achse der x im Allgemeinen in zwei Puncten, deren Abscissen x wir finden, wenn wir in obiger Gleichung $z = 0$ setzen. So wird

$$x^2 + mx\sqrt{3}\,\sin.\pi - \frac{m^2}{2}(1 - 3\,\sin.^2\pi) = 0,$$

$$x^2 = - mx\sqrt{3}\,\sin.\pi + \frac{m^2}{2}(1 - 3\,\sin.^2\pi),$$

$$x = -\frac{m}{2}\sqrt{3}\,\sin.\,\pi \pm \sqrt{\frac{3m^2}{4}\sin.^2\pi + \frac{m^2}{2}(1 - 3\sin.^2\pi)},$$

und endlich

$$x = -\frac{m}{2}\sqrt{3}\,\sin.\,\pi \pm \frac{m}{2}\sqrt{(2 - 3\sin.^2\pi)}.$$

Soll daher eine dieser Ellipsen die Achse der x nur in einem Puncte berühren, so müssen diese beiden Werthe in einen zusammenschmelzen, oder

$$\frac{m}{2}\sqrt{(2 - 3\sin.^2\pi)} = 0$$

seyn. Mithin wird

$$2 - 3\sin.^2\pi = 0 \quad \text{und} \quad \sin.\,\pi = \pm\sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

seyn müssen.

Allein denselben Werth von $\sin.\,\pi$ fanden wir früher, §. 14., für jene Ellipse, welche den Kreis $AWEC$ in dem einzigen Puncte A berührt; eben diese Ellipse hat daher die Achse der x und der z zu Tangenten.

Setzen wir den gefundenen Werth von $\sin.\,\pi = \pm\sqrt{\tfrac{2}{3}}$ in einen der beiden Werthe von x, so finden wir für diese $\frac{m}{\sqrt{2}}$. Der Punct, wo die in Rede stehende Ellipse die Achse der x berührt, liegt daher in dem Durchschnitte der aus A auf jene Achse geführten Senkrechten mit derselben.

Es bedarf wohl kaum einer Erörterung, dafs eben diese Ellipse auch die Achse der z in dem Puncte berührt, den die aus A auf sie geführte Senkrechte bestimmt.

Vergleichen wir den vorhin gefundenen Werth von

$$x = -\frac{m\sqrt{3}}{2}\sin.\,\pi \pm \frac{m}{2}\sqrt{(2 - 3\sin.^2\pi)}$$

mit jenen von t' und u' (§. 14.), den Coordinaten der Puncte, in denen die Ellipse den Kreis $AWEC$ berührt,

$$t' = \pm\, m\sqrt{(1 - \tfrac{3}{4}\sin.^2\pi)} \quad \text{und} \quad u' = m\,\sin.\,\pi\sqrt{\tfrac{3}{4}},$$

so ergibt sich die Beziehung $x = \frac{t' - u'}{\sqrt{2}}$; in der That haben wir auch mit Hülfe dieser letztern Gleichung das Coordinatensystem der x und z in jenes der t, u übertragen.

Setzen wir in der Gleichung

$$x^2 + m x \sqrt{3} \sin. \pi - \frac{m^2}{2} (1 - 3 \sin.^2 \pi)$$

$x = - m$, so erhalten wir für jene Ellipse, welche den Durchmesser DY in dem Endpuncte D berührt:

$$m^2 - m^2 \sqrt{3} \sin. \pi - \frac{m^2}{2} (1 - 3 \sin.^2 \pi) = 0$$

$$\text{und} \quad \sin. \pi = \sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Ohne die Werthe von A, B, a, b', b'', E, t', u', welche dem Werthe $\sin. \pi = \sqrt{\frac{1}{3}}$ entsprechen, alle aufzusuchen, wollen wir uns mit denen von b'' und E begnügen. Der erstere findet sich gleich Null, der zweite $= \frac{2}{3} m$. Jene Ellipse geht also durch den Mittelpunct O des Aufrisses der Kugel, und ihre Excentricität ist der kleinern Achse des im §. 15. erwähnten eignen Schattens im Innern der hohlen Halbkugel $AWEC$ gleich.

§. 19. Suchen wir nunmehr jene Puncte der durch die Gleichung

$$z^2 - xz + x^2 - (z - x) m \sqrt{3} \sin. \pi - \frac{m^2}{2} (1 - 3 \sin.^2 \pi) = 0$$

oder

$$x^2 - (z - m \sqrt{3} \sin. \pi) x + z^2 - m z \sqrt{3} \sin. \pi - \frac{m^2}{2} (1 - 3 \sin.^2 \pi) = 0$$

dargestellten Ellipsen, in denen die Werthe von z und x gröſste oder kleinste werden.

Für die gröſsten sowohl als für die kleinsten Werthe von z müssen die beiden aus der angeführten Gleichung entspringenden Werthe von

$$x = \frac{(z - m\sqrt{3}\sin.\pi)}{2}$$

$$\pm\sqrt{\left(\frac{z-m\sqrt{3}\sin.\pi}{2}\right)^2 - z^2 + mz\sqrt{3}\sin.\pi + \frac{m^2}{2}(1-3\sin.^2\pi)}$$

in einen verschmelzen, also mufs der unter dem Wurzelzeichen befindliche Ausdruck verschwinden.

Wir erhalten so für die gröfsten oder kleinsten Werthe von z:

$$\tfrac{1}{4}(z-m\sqrt{3}\sin.\pi)^2 = z^2 - mz\sqrt{3}\sin.\pi - \frac{m^2}{2}(1-3\sin.^2\pi)$$

und $z = \frac{m}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}\sin.\pi \pm 2\cos.\pi)$,

und für den entsprechenden Werth von x:

$$= \frac{z - m\sqrt{3}\sin.\pi}{2} = \frac{m}{\sqrt{6}}(-\sqrt{2}\sin.\pi \pm \cos.\pi).$$

Der geometrische Ort aller Puncte, welchen die gröfsten und kleinsten Werthè von z entsprechen, findet sich nun, wenn man mittelst der für x oder z gefundenen Werthe, sin. π aus der Gleichung der Ellipsen eliminirt. So gibt der Werth von $x = \frac{z - m\sqrt{3}\sin.\omega}{2}$:

$$\sin.\pi = \frac{z - 2x}{m\sqrt{3}};$$

und dieser, in die Gleichung

$$x^2 - (z-m)\sqrt{3}\sin.\pi \,.\, x + z^2 - mz\sqrt{3}\sin.\pi - \frac{m^2}{2}(1-3\sin.^2\pi) = 0$$

gesetzt, gibt $z^2 + 2x^2 - m^2 = 0$.

Der geometrische Ort der gröfsten und kleinsten Werthe der Ordinaten z in den Aufrissen der gleichbeleuchteten Linien der Kugel ist demnach eine Ellipse, deren Mittelpunct jener des Kreises $HWEC$, deren gröfsere Achse der verticale Durchmesser eben dieses Kreises, die kleinere aber jener Theil des horizontalen

Durchmessers Dy ist, den die aus A und E auf ihn gezogenen Senkrechten abschneiden.

Wiederholen wir dasselbe Verfahren in Rücksicht auf die gröſsten und kleinsten Werthe der Abscissen x, so finden wir

$$x = \frac{m}{\sqrt{6}} (\sqrt{2} \sin.\pi \pm 2 \cos.\pi) \quad \text{und}$$

$$z = \frac{m}{\sqrt{6}} (-\sqrt{2} \sin.\pi \pm \cos.\pi),$$

und für ihren geometrischen Ort $x^2 + 2z^2 - m^2 = 0$ die Gleichung einer Ellipse, die mit der vorigen concentrisch und ihr vollkommen gleich, aber so umgestürzt ist, daſs ihre zweite Achse auf die erste jener zu liegen kommt.

§. 20. Die Aufgabe, die wir so eben lösten, nämlich den geometrischen Ort aller Puncte der verschiedenen Aufrisse gleichbeleuchteter Linien der Kugel, welche gröſsten oder kleinsten Werthen der Coordinaten x oder z entsprechen, zu finden, läſst sich auch so geben: den geometrischen Ort aller jener Puncte zu bestimmen, in denen diese Ellipsen durch horizontale oder verticale Tangenten berührt werden. Sie ist also nur ein besonderer Fall einer viel allgemeinern, nämlich die Krumme anzugeben, welche die Vereinigung aller jener Puncte bildet, in welcher diese Ellipsen durch Tangenten berührt werden, welche derselben gegebenen Richtung folgen.

Die Gleichung der Ellipsen für die Achsen t und u ist

$$t^2 + 3u^2 - m^2 - 2um\sqrt{6} \sin.\pi + 3m^2 \sin.^2\pi = 0.$$

An jenen Puncten derselben, wo die Tangenten einer gegebenen Richtung folgen (welche mit der Achse der t einen Winkel bildet, dessen Tangente wir $= k$ setzen), muſs nothwendig $-\frac{du}{dt} = k$ seyn. Allein die

obige Gleichung gibt, wenn wir sie in Bezug auf t und u differenziren:

$$2 t\,dt + 6 u\,du - 2\,du\,m\sqrt{6}\sin.\pi = 0 \quad \text{oder}$$

$$t + \frac{3u\,du}{dt} - \frac{du}{dt}\cdot m\sqrt{6}\sin.\pi = 0,$$

aus welcher

$$-\frac{du}{dt} = \frac{t}{3u - m\sqrt{6}\sin.\pi} = k \text{ und } \sin.\pi = \frac{3ku - t}{km\sqrt{6}},$$

$$\text{endlich} \quad \sin.^2\pi = \frac{(3ku - t)^2}{6k^2m^2} \quad \text{folgt.}$$

Wenn wir mit Hülfe dieser Werthe $\sin.\pi$ und $\sin.^2\pi$ aus der Gleichung

$$t^2 + 3u^2 - 2um\sqrt{6}\sin.\pi + 3m^2\sin.^2\pi = 0$$

eliminiren, so erhalten wir für den gesuchten geometrischen Ort

$$t^2 + 3u^2 - m^2 - \frac{2u(3ku - t)}{k} + \frac{(3ku - t)^2}{2k^2} = 0$$

die Gleichung einer Ellipse, deren nähere Eigenschaften wir untersuchen wollen. Setzen wir zuvörderst $t = 0$, so finden wir für die Entfernung der Durchschnitte derselben, mit der Achse der u, vom Mittelpunct O

$$3u^2 - m^2 - \frac{6kuu}{k} + \frac{(3ku)^2}{2k^2} = 0 \quad \text{und} \quad u = \pm m\sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

Die gesuchte Ellipse geht also immer durch die Aufrisse der beiden leuchtenden Puncte I, I, welche auch die gegebene Richtung der Tangenten seyn mag.

Zu dem Kreise $AWEC$ sind zwei Tangenten möglich, welche der gegebenen Richtung folgen, und den Kreis in zwei Puncten V, V berühren. Allein diese beiden Puncte sind zugleich Berührungspuncte des Kreises mit zweien der unendlich vielen Ellipsen, welche die Aufrisse der gleichbeleuchteten Linien bilden (jene mitgerechnet, welche der entgegengesetzten Lichtstrahlrichtung folgen). Unsere Ellipse muſs also nothwendig

durch diese beiden Puncte gehen. Ihr Mittelpunct muſs eben daher in O, dem Mittelpuncte des Kreises $AWEC$, liegen, da dieser in dem Durchschnitte der sich halbirenden Sehnen II und VV der Ellipse liegt. AV endlich wird die halbe groſse Achse derselben.

Für diese wird nämlich

$$d(t^2 + u^2) = 0, \quad 2t\,dt + 2u\,du = 0, \quad \text{oder}$$
$$\frac{du}{dt} = -\frac{t}{u} \quad \text{und} \quad -\frac{du}{dt} = \frac{t}{u} = k,$$

welcher Bedingung nur die Coordinaten der Puncte V entsprechen.

§. 21. Eine interessante Beziehung ergibt sich auch, wenn wir die Puncte suchen, welche der Aufriſs des eignen Schattens der hohlen Halbkugel $AWEC$ unter der gewöhnlichen Lichtstrahlrichtung mit den gleichbeleuchteten Linien derselben Kugel gemein hat. Die Gleichung des erwähnten Schattens ist

$$q u^2 + t^2 - m^2 = 0,$$

und jene des Aufrisses der gleichbeleuchteten Linien

$$3u^2 + t^2 - 2um\sqrt{6}\,\sin.\pi - m^2(1 - 3\,\sin.^2\pi) = 0.$$

Indem wir die erste dieser Gleichungen von der letztern abziehen, und den Unterschied durch 6 theilen, erhalten wir

$$u^2 + \frac{2mu\,\sin.\pi}{\sqrt{6}} - \frac{m^2}{2}\sin.^2\pi = 0,$$

aus welcher $u = \dfrac{-m\,\sin.\pi \pm 2m\,\sin.\pi}{\sqrt{6}}$, und

$$u = -m\,\sin.\pi\sqrt{\tfrac{3}{2}} \quad \text{oder} \quad u = \frac{m}{\sqrt{6}}\sin.\pi$$

folgt. Der erste dieser beiden Werthe gibt

$$t = \pm\, m\sqrt{(1 - \tfrac{27}{2}\,\sin.^2\pi)},$$

und der zweite

$$t = \pm\, m\sqrt{(1 - \tfrac{3}{2}\,\sin.^2\pi)}.$$

Es ist auffallend, daſs der zweite dieser letztern Werthe dem in §. 14. für den Berührungspunct der Ellipse mit dem Kreis *AWEC* gefundenen Werthe von t' gleicht, und daſs der ihm entsprechende Werth von

$$u = \frac{m}{\sqrt{6}} \sin.\pi = \frac{m}{3} \sin.\pi \sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

ein Drittheil von dem dort gefundenen $u' = m \sin.\pi \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ der andern Coordinate eben jenes Berührungspunctes ist; und da wir früher (im §. 10) $a = m \sin.\pi \sqrt{\tfrac{2}{3}}$ fanden, mithin $\frac{1}{3} u' = \frac{1}{2} a$ ist, sich die merkwürdige Beziehung ergibt, daſs, wenn wir die den eigenen Schatten der hohlen Halbkugel im Aufrisse darstellende halbe Ellipse durch Verzeichnung ihrer andern auf der bejahenden Seite der u liegenden Hälfte ergänzen, der Durchschnitt dieser letztern mit jeder der verschiedenen durch die im Anfange dieses Paragraphs angeführte Gleichung dargestellten Ellipsen von der Achse der t genau um die Hälfte des Abstandes der Mittelpuncte jener Ellipsen von eben dieser Achse entfernt ist, während seine Entfernung von der Achse der u jener der beiden Berührungspuncte mit dem Kreise *AWEC* von eben dieser letztern Achse gleicht.

Manche merkwürdige Eigenschaft lieſse sich wohl noch aus der Gleichung des Aufrisses der gleichbeleuchteten Linien der Kugel herleiten; wir wollen jedoch ihre Aufsuchung mit der Bemerkung schlieſsen, daſs die im §. 10. gefundenen Werthe von a und A gleich

$$m \sin.\pi \sqrt{\tfrac{2}{3}} \quad \text{und} \quad \pm\, m \cos.\pi,$$

die Gleichung $3a^2 + 2A^2 = m^2$ geben, und daſs folglich die Endpuncte der gröſsern Achsen dieser Aufrisse ebenfalls in einem elliptischen Umfange liegen, dessen Achsen der Richtung der Coordinaten t und u folgen.

§. 22. Gehen wir nun zu den Grundrissen der gleich-

beleuchteten Linien der Kugel über. Diese Linien selbst sind, wie wir früher sahen, durch das gleichzeitige Bestehen der beiden Gleichungen

$x^2 + y^2 + z^2 - m^2 = o$ und $z - x - y - m\sqrt{3}\sin.\pi = o$

dargestellt; ihr Grundriſs folglich durch jene Gleichung, welche wir durch Eliminirung der z erhalten, das ist durch

$$y^2 + xy + x^2 + (x+y)\,m\sqrt{3}\sin.\pi - \frac{m^2}{2}(1 - 3\sin.^2\pi) = o.$$

Übertragen wir auch die Coordinaten x und y in jene t und u (die mit ihren Winkeln 45 Grade bilden, den Ursprung aber gemein haben), wodurch $x = \frac{t-u}{\sqrt{2}}$ und $y = \frac{t+u}{\sqrt{2}}$ wird (Fig. 19), so erhalten wir für die Achsen ct und ue:

$$3t^2 + u^2 + 2tm\sqrt{6}\sin.\pi - m^2(1 - 3\sin.^2\pi) = o$$

oder $u^2 + (t\sqrt{3} + m\sqrt{2}\sin.\pi)^2 - m^2\cos.^2\pi = o.$

Diese beiden Gleichungen bieten uns die Mittel, alle Eigenschaften der gesuchten Grundrisse zu entwickeln; allein bei der groſsen Ähnlichkeit, welche diese Gleichung mit jener der Aufrisse hat, würde dieſs nur eine Wiederholung seyn. Wir wollen uns daher begnügen, die vorzüglichsten Resultate dieser Untersuchung kurz anzuzeigen.

Es stelle der Kreis ucx, dessen Mittelpunct o ist, den Grundriſs der Kugel, die Geraden ox und oy die Achsen der x und y, jene ot, ou die der t und u vor. Man mache nunmehr $ug = uo$, und ziehe ehg, so wird oh die halbe kleinere, und ou die halbe gröſsere Achse des Grundrisses der gröſsten gleichbeleuchteten Linie (das ist des eignen Schattens der Kugel). Wird ferner hf ebenfalls gleich uo gemacht, und aus o mit dem Halbmesser of der Kreis ifi beschrieben, so ist sein Umfang

der geometrische Ort aller Brennpuncte der gesuchten Grundrisse, i, i aber sind die Grundrisse der beiden leuchtenden Puncte. Endlich gibt cs, einem Drittheile von co gleich gemacht, die halbe kleine, und die auf co aus s gezogene Senkrechte sp, gleich oh genommen, die halbe groſse Achse jener Ellipse, welche der Kreis ucx in einem einzigen Puncte c berührt, und zugleich die Achse der x und y tangirt. Alle kleinern Ellipsen fallen innerhalb diese, alle gröſsern haben mit dem Kreis ucx zwei Berührungspuncte gemein. Ihre Construction stimmt mit jener ihrer Aufrisse vollkommen überein.

§. 23. Bevor wir die Untersuchung der Grundrisse der gleichbeleuchteten Linien schlieſsen, mag eine aus der Gleichung derselben flieſsende, sehr einfache Construction der beiden aus dem Mittelpuncte o der Kugel zu einer derselben gezogenen Tangenten hier Platz finden.

Fig. 20. Stellt AEC den Grundriſs der Kugel, und $BDKI$ jenen einer unter dem Einfallswinkel π gleichbeleuchteter Linien derselben vor, deren Gleichung

$$3t^2 + u^2 + 2tm\sqrt{6}\,\sin.\pi - m^2(1 - 3\sin.^2\pi) = 0,$$

OL und OK die beiden zu ihr aus O gezogenen Tangenten.

In den Berührungspuncten K, L muſs nothwendig $\frac{u}{t} = \frac{du}{dt}$ seyn, da dieser letztere Ausdruck die Tangente des Winkels LON vorstellt.

Die Gleichung der Ellipse BLK gibt differenzirt:

$$6t\,dt + 2u\,du + 2m\,dt\sqrt{6}\,\sin.\pi = 0 \quad \text{oder}$$

$$6t + \frac{2u\,du}{dt} + 2m\sqrt{6}\,\sin.\pi = 0;$$

und weil $\frac{du}{dt} = \frac{u}{t}$ ist:

$$3t^2 + u^2 + mt\sqrt{6}\,\sin.\pi = 0.$$

Für die Berührungspuncte L und K entsprechen also die

Coordinaten t und u der beiden Gleichungen

$$3t^2 + u^2 + 2tm\sqrt{6}\sin.\pi - \frac{m^2}{2}(1 - 3\sin.^2\pi) = 0$$

$$\text{und} \quad 3t^2 + u^2 + mt\sqrt{6}\sin.\pi = 0,$$

aus denen

$$t = \frac{m(1-3\sin.^2\pi)}{\sqrt{6}\,.\sin.\pi} \quad \text{und} \quad u = \frac{m\ .\ \text{cotang.}\,\pi}{\sqrt{\frac{1}{2}(3\sin.^2\pi - 1)}}$$

folgt.

Ist nnn M der Mittelpunct der Ellipse BLK, MF die eine, und MP die andere halbe Achse, und man beschreibt aus M mit dem Halbmesser MP einen Viertelkreis MPG, halbirt MO in R, und schneidet aus R mit dem Halbmesser RM jenen Viertelkreis in r, so gibt die aus r auf OC gezogene Senkrechte rN die Abscisse $ON = t$ der gesuchten Berührungspuncte. In der That ist die halbe kleine Achse

$$MP = \frac{m}{\sqrt{3}}\cos.\pi \quad \text{und} \quad RM = \frac{OM}{2} = \frac{a}{2}\ \text{§. 10.} = \frac{m}{2}\sin.\pi\sqrt{\tfrac{2}{3}},$$

und aus den rechtwinkligen Dreiecken MrN und NrR

$$RN = \frac{Rr^2 + MR^2 - Mr^2}{2\,MR} = \frac{2\,RM^2 - Mr^2}{2\,RM} \quad \text{und}$$

$$ON = \frac{2\,RM^2 - Mr^2}{2\,RM} + RM$$

$$= \frac{4\,RM^2 - Mr^2}{2\,RM} = \frac{\frac{2\,m^2\sin.^2\pi}{3} - \frac{m^2\cos.^2\pi}{3}}{m\sin.\pi\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{3\,m^2\sin.^2\pi - m^2}{3\,m\sin.\pi\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{m(3\sin.^2\pi - 1)}{\sin.\pi\sqrt{6}},$$

welcher Ausdruck von jenem $t = \dfrac{m(1-3\sin.^2\pi)}{\sin.\pi\sqrt{6}}$ nur in der Bezeichnung verschieden ist; wirklich liegt auch $ON = t$ auf der verneinenden Seite der Abscissen t. Um aber die Ordinate $u = NL$ zu verzeichnen, bedürfen wir des etwas verwickelten Ausdrucks

$$u = \frac{\cot.\pi}{\sqrt{\frac{1}{2}(3\sin.^2\pi - 1)}}$$

nicht; denn vereinigen wir r mit G, und verlängern rG bis an die Linie CO in T, so schneidet FT auf der verlängerten Senkrechten Nr in L den gesuchten Berührungspunct ab. Augenscheinlich wird durch diese Construction

$$GM : FM = 2N : LN,$$

und in diesem Verhältnisse müssen überhaupt jede zwei derselben Abscisse t entsprechende u der Ellipse und des auf der halben Achse $MP = MG$ als Halbmesser beschriebenen Kreises stehen.

Wären hingegen zu einer der Ellipsen, welche den Grund- oder Aufriſs einer der gleichbeleuchteten Linien der Kugel bilden, die Tangenten nach einer gegebenen Richtung zu ziehen, so dient hiezu die folgende, überhaupt auf jede gegebene Ellipse anwendbare Verzeichnung.

Fig. 21. Man ziehe aus M die Senkrechte MS auf die gegebene Richtung der Tangente, aus G die Senkrechte MV auf MG bis in den Punct V der MS, und aus F die gleichlaufende FQ mit GV, und dieser letztern gleich; vereinige M mit Q, und führe aus dem Durchschnitte R der MQ mit dem aus M mit dem Halbmesser $MP = MG$ beschriebenen Kreise die Senkrechte auf MQ, welche die verlängerte MP in T schneidet, so gibt die aus T auf MS gezogene Senkrechte TL die verlangte Tangente zur Ellipse FLP. Wirklich gibt diese Construction für den Berührungspunct L die Abscisse $t = \frac{b \text{ tang. } Q}{\sqrt{a^2 + b^2 \text{ tang}^2 Q}}$, wenn b die halbe kleine Achse MP, a die halbe groſse MF, und Q den Winkel vorstellt, welche die gegebene Tangentenrichtung mit der Achse $MP = b$ macht; und man kann sich leicht über-

zeugen, daſs dieser Werth von t der verlangten Bedingung entspricht.

§. 24. Für die wirkliche Verzeichnung der Aufrisse und Grundrisse der gleichbeleuchteten Linien der Kugel, Fig. 18, bleibt noch zu bemerken, daſs bei den erstern nur jene Ellipse ATV und die innerhalb derselben liegenden ganz, von den übrigen aber, bis zu der eignen Schattengränze der Kugel, nur die Theile wie $BGQN$ etc. zu zeichnen sind, welche von den Berührungspuncten BN begränzt werden, und ihre erhabene Seite gegen den Punct E gewendet haben, Fig. 19, während bei den Grundrissen die entsprechenden Ellipsen chm, und die innerhalb derselben liegenden ganz, von den übrigen aber nur die gegen den Punct t gewendeten Theile wie bnr darzustellen sind.

§. 25. Beschäftigen wir uns nunmehr mit der Bestimmung der gleichbeleuchteten Linien im *Pfuhle*, das ist in einer Oberfläche, die durch Umdrehung eines Halbkreises ABE, Fig. 22, um eine verticale Achse CD, die von dem verticalen Durchmesser AE des Kreises um eine Entfernung $ED = n$ absteht, erzeugt wurde. Nennen wir den Halbmesser des erzeugenden Kreises $ABEm$, so wird die Gleichung dieser Oberfläche augenscheinlich $(\sqrt{x^2 + y^2} - n)^2 + z^2 - m^2 = 0$, wenn wir den Ursprung der Coordinaten in dem Durchschnitte der aus dem Mittelpuncte des erzeugenden Kreises gezogenen Horizontalen mit der verticalen Umdrehungsachse, und die Achse der z in dieser letztern voraussetzen.

Diese Gleichung läſst sich bequemer auch so darstellen:

$$\sqrt{x^2 + y^2} - n - \sqrt{m^2 - z^2} = 0.$$

Nunmehr wird nach §. 4.:

$$F(x, y, z) = 0 = \sqrt{x^2 + y^2} - n - \sqrt{m^2 - z^2},$$

$$\frac{d.F(x,y,z)}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{d.F(x,y,z)}{dy} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{d.F(x,y,z)}{dz} = \frac{z}{\sqrt{m^2-z^2}},$$

$$\frac{d.F(x,y,z)}{dx} + \frac{d.F(x,y,z)}{dy} = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\left(\frac{d.F(x,y,z)}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d.F(x,y,z)}{dy}\right)^2 = 1;$$

die dort angeführte Bedingungsgleichung wird also:

$$\left[\frac{z}{\sqrt{m^2-z^2}} - \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]^2 - \left(\frac{1+z^2}{m^2-z^2}\right) 3 \sin.^2 \pi = 0$$

oder

$$\frac{z}{\sqrt{m^2-z^2}} - \frac{1+\frac{y}{x}}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}} - \frac{3\,m^2}{m^2-z^2} \sin.^2 \pi = 0,$$

und das gleichzeitige Bestehen dieser Gleichung mit jener

$$\sqrt{x^2+y^2} - n - \sqrt{m^2-z^2} = 0$$

charakterisirt die Natur der gleichbeleuchteten Linien im Pfuhle.

Die Gleichungen der Aufrisse und Grundrisse dieser Linien lassen sich nun leicht durch beziehungsweise Eliminirung von y oder z ausmitteln; allein dieſs würde uns auf ziemlich verwickelte Ausdrücke führen, während eine nähere Betrachtung der Bedingungsgleichungen uns ein einfaches Verfahren an die Hand gibt, aus den Grund- und Aufrissen der gleichbeleuchteten Linien einer mit dem Pfuhle concentrischen Kugel, deren Durchmesser CD jenem des erzeugenden Kreises gleicht, auch die Grundrisse und Aufrisse der gleichbeleuchteten Linien des Pfuhls abzuleiten.

Die Bedingungsgleichungen gleichbeleuchteter Linien dieser Kugel entspringen offenbar aus jenen des

Pfuhls, wenn wir darin $n = o$ setzen. Sie sind demnach

$$\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{m^2 - z^2} = o \quad \text{und}$$

$$\frac{z}{\sqrt{m^2 - z^2}} - \frac{1 + \frac{y}{x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}} - \frac{3\,m^2}{m^2 - z^2} = o,$$

von welcher die zweite mit der entsprechenden für den Pfuhl identisch ist. Da diese letztere nur z und den Quotienten $\frac{y}{x}$ als veränderliche Gröſsen enthält, so bleibt in ihr z ungeändert, wenn y und x in gleichem geometrischen Verhältnisse wachsen. Allein nur die Puncte der von der Achse CD ausgehenden horizontalen Linien haben die Eigenschaft, daſs für alle ihre Puncte $\frac{y}{x}$ beständig ist, folglich gibt jede aus der Achse CD zu irgend einem Puncte einer gleichbeleuchteten Linie der Kugel CbD gezogene Horizontale in ihrem Durchschnitte mit der Oberfläche des Pfuhls einen Punct der unter dem nämlichen Winkel beleuchteten Linie desselben.

Aus den beiden Gleichungen

$$\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{m^2 - z^2} = o \quad \text{und}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{m^2 - z^2} - x = o$$

folgt ferner, daſs der Abstand $\sqrt{x^2 + y^2}$ eines jeden Punctes des Pfuhls von der Umdrehungsachse

$$= n + \sqrt{m^2 - z^2},$$

jener eines Punctes der Kugel CbD aber nur $\sqrt{m^2 - z^2}$ ist. Jeder Punct einer gleichbeleuchteten Linie der Kugel CbD liegt also mit einem Puncte der unter demselben Winkel beleuchteten Linie des Pfuhls in derselben Horizontalen, aus der Umdrehungsachse entspringenden Geraden, seine Entfernung von ihm ist beständig, und

dem Abstande des verticalen Durchmessers des erzeugenden Kreises von der Umdrehungsachse gleich.

Mit andern Worten: jede gleichbeleuchtete Linie der Kugel *CbD*, und die entsprechende des Pfuhls, liegen in einer Oberfläche, welche durch eine Gerade erzeugt wurde, die immer senkrecht auf die Umdrehungsachse *CD* längst einer dieser beiden Linien hingleitet, und diese letztern schneiden auf der erzeugenden Geraden Stücke ab, welche dem Abstande der Umdrehungsachse des Pfuhls von seinem erzeugenden Kreise gleichen.

§. 26. Da die Grundrisse horizontaler Linien diesen Linien gleichen, so wird jede aus dem Mittelpuncte des Grundrisses der Kugel *CbD* gezogene Gerade einem Puncte des Grundrisses der entsprechenden gleichbeleuchteten Linie des Pfuhls begegnen, welche von dem vorigen um dieselbe Gröſse *n* entfernt ist.

Da ferner jede nach irgend einem Verhältnisse getheilte Linie in ihrem Aufrisse (und überhaupt in jeder Projection) nach demselben Verhältnisse getheilt erscheint, so wird die von irgend einem Puncte einer gleichbeleuchteten Linie des Pfuhls auf die Achse *CD* gezogene Senkrechte sich zu jenem Theile derselben, der auf ihr durch die entsprechende gleichbeleuchtete Linie der Kugel und die Achse *CD* abgeschnitten wird, wie der Aufriſs der erstern dieser Linien zu jenem der letztern sich verhalten.

Stellen wir uns nämlich den Pfuhl und die erwähnte Kugel durch eine horizontale Ebene geschnitten vor, die zweien auf diesen Oberflächen liegenden gleichbeleuchteten Linien in zwei Puncten begegnet. Offenbar schneidet diese die Kugel und den Pfuhl in zwei concentrischen Kreisen.

Der Halbmesser des erstern ist die von dem Puncte

des Pfuhls auf die Achse CD gezogene Senkrechte, der Halbmesser des letztern jener Theil dieser Geraden, welcher durch die Kugel und die Umdrehungsachse CD auf ihr abgeschnitten wird.

Fig. 23. Der erste dieser Kreise sey durch amb, der andere durch AMB dargestellt; n, N seyen jene beiden Puncte, in denen sie von den gleichbeleuchteten Linien des Pfuhls und der Kugel begegnet werden, so daſs nO jene Senkrechte auf die Achse vorstellt, von der wir vorhin sprachen; Om endlich sey der Durchschnitt der Ebene der beiden Kreise mit jener der Aufrisse.

Ziehen wir np, NP senkrecht auf Om, so sind die Puncte P, p die Aufrisse jener N, n. Da die Geraden On und ON die Entfernungen der Puncte n, N von der Umdrehungsachse CD sind, so sind Op und OP die Aufrisse eben dieser Entfernungen; allein die Dreiecke Onp und ONP sind ähnlich, und geben die Proportion

$$On : ON = Op : OP \text{ oder}$$

$$Om : OM = Op : OP.$$

§. 27. Diese beiden merkwürdigen Beziehungen zwischen den Grundrissen und Aufrissen der gleichbeleuchteten Linien des Pfuhls und der gedachten Kugel bieten uns die Mittel zu der nachfolgenden einfachen Verzeichnung der erstern.

Fig. 22. Es stelle zuvörderst $DBCW$ den Aufriſs des Pfuhls vor, welcher aus den zwei erzeugenden Halbkreisen und einem Rechtecke zusammengesetzt ist, dessen verticale Seiten dem Durchmesser des erzeugenden Kreises, die horizontalen aber dem Abstande desselben von der Umdrehungsachse gleich sind.

Der Kreis $abcs$ sey der Aufriſs jener Kugel, die wir uns concentrisch mit dem Pfuhl, und von gleichem

Durchmesser mit seinem erzeugenden Kreise dachten. Man ziehe den verticalen Durchmesser *C D*, und die beiden *a c*, *b s*, so daſs die Winkel *a O C* und *b O C* 45° haben, und beschreibe die Ellipsen *p r q*, *a f g*, *m k n* etc. und Aufrisse der gleichbeleuchteten Linien der Kugel *C b D s*; eben so bestimme man den Aufriſs *b e s* des eignen Schattens dieser Kugel, so wie jenen *i* des leuchtenden Punctes derselben. Nunmehr mache man *h I* gleich der vierten Proportionirten zu *h 7*, *h I* und *h i*, so wird *I* der Aufriſs des leuchtenden Punctes des Pfuhls. Macht man ferner *l P* und *l Q* gleich der vierten Proportionirten zu *l 8*, *l p*, *l L*, und zu *l 8*, *l q*, *l L*, so sind die Puncte *P*, *Q* zwei Puncte der Aufrisse jener Linie des Pfuhls, welche mit dem Kreise der Kugel *C b s* gleichbeleuchtet ist, dessen Aufriſs die Ellipse *p r q* darstellt. Durch eben dieses Verfahren lassen sich alle Puncte der Aufrisse der gleichbeleuchteten Linien der Kugel in jenen des Pfuhls übertragen.

Die Puncte *R*, *V* etc., das ist jene Puncte der gesuchten Aufrisse, welche am nächsten oder am weitesten von der Horizontalen *B W* abstehen, entsprechen den in derselben horizontalen Linie mit ihnen liegenden Puncten *r*, *v* der Aufrisse der gleichbeleuchteten Linie der Kugel; diese letztern können nach §. 19. unabhängig von der übrigen Verzeichnung der Ellipsen bestimmt, und nach der vorhin gezeigten Methode in den Aufriſs des Pfuhls übertragen werden. Das nämliche gilt von den im §. 18. bestimmten Puncten, wie *m*, *s*, *b*, *n*, in denen die verschiedenen Ellipsen den Kreis *C a s b* berühren, denen die Puncte *M S B N* im Pfuhle entsprechen.

Es ist hier nicht überflüssig, zu bemerken, daſs man bei dieser Verzeichnung eine jener Ordnungen befolgen muſs, deren man sich in ähnlichen Fällen zur Vermeidung der Verwirrung zu bedienen pflegt.

§. 28. Noch einfacher ist die Verzeichnung der Grundrisse der gleichbeleuchteten Linien des Pfuhls.

Fig. 24. Der Kreis $ABCD$ stelle den Grundriſs des Pfuhls, der Kreis XY seine Grundfläche, $abcd$ aber den Grundriſs jener Kugel vor, die wir concentrisch mit dem Pfuhle uns dachten.

Ziehen wir den Durchmesser BD gleichlaufend mit dem Grundrisse der Lichtstrahlrichtung, und AC senkrecht auf diese. Nach denen im Laufe dieser Abhandlung gegebenen Methoden seyen die halbe Ellipse ace (Grundriſs des eignen Schattens der Kugel), die elliptischen Bögen fgh, lws etc., und die ganzen Ellipsen $dnvt$, pz etc. etc., endlich der Grundriſs i des leuchtenden Punctes der Kugel verzeichnet. Alle Puncte 1, 2, 5, 6 dieser Ellipsen, so wie der leuchtende Punct i selbst, werden nun in den Grundriſs des Pfuhls in 3, 4, 7, 8, I übertragen, wenn man aus dem Mittelpuncte O die Geraden $O1$, $O2$, $O5$, $O6$, Oi etc. zieht, und auf ihnen Verlängerungen $\overline{13}$, $\overline{24}$, $\overline{37}$, $\overline{68}$, $\overline{iI}$ gleich Ox macht. Auch hier kann man durch die früher gezeigten Verfahren jene Puncte a, f, l, s, h, c, in denen die Grundrisse der gleichbeleuchteten Linien der Kugel den Kreis $adcb$ berühren, so wie ihre Berührungspuncte 9, 10 etc. mit den beiden aus dem Mittelpuncte O zu ihnen gezogenen Tangenten, besonders bestimmen, und in A, F, L, S, H, C, 11, 12 übertragen.

Wären die gleichbeleuchteten Linien des Pfuhls auf andere, als die von uns angenommenen Ebenen zu entwerfen, oder wäre die Achse des Pfuhls bei unserm Coordinatensysteme nicht vertical, so bieten, wie man leicht sieht, die vorhin erwähnten Beziehungen zwischen den gleichbeleuchteten Linien des Pfuhls und der Hülfskugel gleichwohl die nöthigen Mittel zu ihrer Verzeichnung.

§. 29. Sind die Aufrisse und Grundrisse der gleichbeleuchteten Linien einer Oberfläche zu bestimmen, welche durch Umdrehung einer gegebenen Krummen um eine verticale Achse entstanden ist, deren Gleichung folglich durch $\sqrt{x^2+y^2}-fz=0$ oder $x^2+y^2-\varphi z=0$ dargestellt werden kann (wenn fz und φz was immer für Functionen von z bedeuten), so erhalten wir, als gleichzeitig mit dieser bestehende Bedingungsgleichung, nach §. 3.:

$$\left(\frac{d\,.\,\varphi z}{dz}+2ax+2by\right)^2$$
$$-(1+a^2+b^2)\sin.^2\pi\left(\left(\frac{d\,.\,\varphi z}{dz}\right)^2+4x^2+4y^2\right)=0,$$

und die Elimination der z oder y aus diesen beiden Gleichungen gibt uns beziehungsweise jene des gesuchten Grund- oder Aufrisses.

So wie die Natur der erzeugenden Krummen durch die Beschaffenheit der φz gegeben ist, wird diese Elimination möglich, und bietet alle Mittel, die Eigenschaften der Grund- und Aufrisse der gleichbeleuchteten Linien auszuspähen. Unstreitig würde dann jede einzelne Oberfläche zu Resultaten führen, nicht minder wichtig als die von uns an der Kugeloberfläche und dem Pfuhl entdeckten. Für die Anwendung aber kann dieses Verfahren nicht zweckmäſsig seyn, wohl aber der Bearbeitung eines Lehrbuchs practischer Methoden zur Verzeichnung der gleichbeleuchteten Linien zur Grundlage dienen. Diese liegt jedoch auſser den Grenzen dieser Abhandlung.

Dagegen werden wir in dem folgenden Paragraphe eine allgemeine rein geometrische Methode abhandeln, um die unter einem gegebenen Winkel beleuchteten Linien der durch Umdrehung einer Linie von einfacher

Krümmung um eine verticale Achse entstandenen Oberflächen sowohl im Grund- als Aufrisse zu verzeichnen.

§. 30. Unstreitig ist unser Zweck erreicht, wenn wir den Punct eines jeden beliebigen Meridians der gegebenen Oberfläche zu bestimmen wissen, an welchem die Lichtstrahlrichtung mit der die Oberfläche tangirenden Ebene den angenommenen Einfallswinkel bildet.

Diese tangirende Ebene wird durch zwei auf einander senkrechte Gerade bestimmt, deren eine Tangente zu dem Meridiane an dem zu suchenden Puncte, die andere aber durch eben diesen Punct auf die Ebene des Meridians senkrecht geführt ist.

Durch die Richtung der erstern dieser beiden Geraden für einen gegebenen Meridian wird also der gesuchte Punct bestimmt, und ergibt sich durch eine mit ihr gleichlaufend gezogene Tangente zu der erzeugenden Krummen in demselben Meridiane. Es handelt sich also nur darum, den Winkel zu finden, den die zu einem beliebigen Meridiane gezogene Tangente mit der Umdrehungsachse machen muſs, wenn die durch sie und eine darauf senkrechte und horizontale Gerade geführte Ebene mit der gegebenen Lichtstrahlrichtung den verlangten Einfallswinkel bilden soll.

Fig. 25. Stellen wir uns durch den Berührungspunct S der gesuchten Tangente mit irgend einem Meridiane BSC, der mit der Ebene der Aufrisse den Winkel xOC macht, eine horizontale Ebene geführt vor, deren Durchschnitt mit jener des Meridians FE sey. Aus einem beliebigen Puncte E der FE sey DE gleichlaufend mit dem Grundrisse der Lichtstrahlrichtung, und aus F die Senkrechte auf EF gezogen. Ferner sey der Winkel EDG jenem gleich gemacht, den die Lichtstrahlrichtung mit der horizontalen Ebene macht, und EG senkrecht auf DE, EH aber senkrecht auf EF, und gleich

EG; der Winkel GDL endlich dem gegebenen Einfallswinkel gleich gemacht, zu DG und FH als Durchmesser zwei Kreise DGL und FHE geführt, und die Sehne HM jener GL gleich genommen.

Lassen wir nun den Kreis FHE um seine Sehne FE sich so bewegen, daſs er aus der horizontalen in die verticale Lage kommt, wodurch der Punct H vertical ober E in H', der Punct M vertical unterhalb der Linie EF in M' zu liegen kommt.

Da $EG = EH$, und die rechtwinkligen Dreiecke DEG und DEH' überdieſs die Kathede DE gemein haben, so ist $DH' = DG$, der Winkel GDE jenem EDH' gleich, und DH' die wirkliche Lichtstrahlrichtung.

Da DF horizontal und senkrecht auf FE ist, so ist sie es auch auf die Ebene FEH' oder $FM'H'$; die Ebene DFM' ist folglich ebenfalls senkrecht auf jene $FM'H'$; und da nach unserer Construction die $H'M'$ auf FM', den Durchschnitt der beiden Ebenen DFM' und $FH'M'$, senkrecht ist, so ist sie es auch auf die Ebene DFM, und $H'M'D$ ein rechter Winkel. Allein $H'M' = HM$ wurde $= H$ gemacht, also haben die rechtwinkligen Dreiecke GDL und $H'DM'$: $HD = GD$, $H'M' = GL$, decken sich also, und daher ist der Winkel $H'DM'$ jenem Einfallswinkel GDL gleich. Nun ist aber $H'DM'$ der Winkel, welchen die Lichtstrahlrichtung HD mit der durch den Berührungspunct T auf die Ebene des Meridians gezogenen Senkrechten FE bildet, und FM' in der Ebene des Meridians gelegen. Wird also FM' zugleich auch Tangente zu dem Meridiane, so sind alle unsere Forderungen erfüllt.

Zieht man daher eine Tangente PQ zu einem Meridiane der gegebenen Oberfläche, welche mit der horizontalen Achse den aus unserer Construction sich ergebenden Winkel $M'FE = MFE$, oder mit der Umdre-

hungsachse Oz sein Complement DFM bildet, so ergibt sich dadurch seine Höhe z ober der Ebene der Grundrisse, und seine Entfernung von der Umdrehungsachse Oz. Sein Grundrifs wird auf der Geraden OC bestimmt, indem man $OR = KI$ macht; sein Aufrifs endlich auf der Geraden KI, indem man aus R die Senkrechte RF auf KI zieht.

Indem wir dieses Verfahren für mehrere Meridiane der Oberfläche, mit Beibehaltung desselben Einfallswinkels, wiederholen, ergeben sich nach und nach die Puncte der unter diesem Winkel gleichbeleuchteten Linie.

Es versteht sich von selbst, dafs, wenn zu demselben Meridiane mehrere Tangenten unter derselben Richtung möglich sind, auch jedem der dadurch entstehenden Berührungspuncte eine besondere gleichbeleuchtete Linie entspricht. Manche Bemerkungen, durch welche die wirkliche Verzeichnung der gesuchten Linien nicht selten abgekürzt wird, liegen theils in dem angegebenen Verfahren selbst, theils dringen sie sich dem denkenden Zeichner von selbst auf.

§. 31. Es erübrigt uns noch, von dem Grund- und Aufrisse der gleichbeleuchteten Linien jener Oberflächen zu sprechen, welche durch Umdrehung einer Krummen von einfacher Krümmung um eine horizontale oder schiefe Achse entstanden sind. Im ersten Falle kann die Verzeichnung derselben, wenn die Umdrehungsachse noch überdiefs mit der Richtung der x oder der y gleich läuft, nach dem, was wir bisher gesagt haben, keiner Schwierigkeit unterliegen, wenn man, was dort vertical war, hier horizontal und umgekehrt nimmt.

Schwieriger hingegen ist diese Verzeichnung, wenn die Umdrehungsachse schief gegen die Achsen des Coordinatensystems steht. Zwar könnte man hier die Grund-

und Aufrisse der gleichbeleuchteten Linien, nach dem angeführten Verfahren, vorläufig in einem senkrechten Coordinatensysteme verzeichnen, dessen z mit der Umdrehungsachse übereinkommen, und dann die Puncte dieser Projectionen nach den bekannten Regeln in die zur Verzeichnung bestimmten Projectionsebenen übertragen.

Allein diefs Verfahren würde zu weitschweifig werden. Einfacher geht man zu Werke, wenn man sich durch die Umdrehungsachse mehrere Meridiane vorstellt, auf jeden derselben eine Senkrechte zieht, durch diese Ebenen führt, welche mit der Lichtstrahlrichtung den verlangten Einfallswinkel bilden, und endlich nach den bekannten Methoden tangirende Ebenen gleichlaufend mit diesen zu der Oberfläche führt, deren Berührungspuncte der unter dem angenommenen Einfallswinkel beleuchteten Linie der Oberfläche angehören.

Diese Construction unterliegt für den nur etwas geübten darstellenden Geometer keinem Anstande; doch wollen wir in dem Folgenden den schwierigsten Theil derselben, das ist die Verzeichnung jener Ebene, welche durch eine gegebene Gerade geht, und mit der Lichtstrahlrichtung einen verlangten Winkel macht, anführen.

Fig. 26. Es begegne die Gerade, durch welche die Ebene zu führen ist, jener der Grundrisse in A unter dem Winkel AGH, und ihr Grundrifs sey AG; der Grundrifs der Lichtstrahlrichtung sey in AB, und BAC der Winkel, den sie mit der Ebene der Grundrisse macht; CAE jener, unter welchem die zu bestimmende Ebene die in AB projectirte Gerade schneiden soll.

Ziehen wir aus einem beliebigen Puncte G der AG auf AB die Senkrechte, aus B die Senkrechte auf AC, und aus H jene AL und AN auf AB und AG, und machen $AN = AL$, so wird durch diese Construction der Durchschnittspunct H der Geraden AH mit GN sich so

ergeben, daſs er in der durch BL auf AC geführten senkrechten Ebene zu liegen kommt, wenn wir uns die Dreiecke ANG und ABL vertical aufgestellt vorstellen. Denken wir uns nun AC als die Achse eines rechten Kegels, dessen Spitze in A liegt, und dessen Grundfläche ein in der auf AC durch C geführten senkrechten Ebene liegender Kreis vom Halbmesser CE ist, so bilden augenscheinlich die beiden durch die Gerade AH zu diesem Kegel geführten tangirenden Ebenen mit der Achse desselben, das ist mit der Geradeu AC, den verlangten Winkel. Diese beiden Ebenen sind daher zu construiren.

Offenbar müssen sie durch die beiden Berührungspuncte der aus H zu der Grundfläche des Kegels gezogenen Tangenten gehen; die Lage dieser beiden Puncte bestimmt daher, im Vereine mit der Geraden AH, unsere gesuchten Ebenen. Lassen wir nun die Grundfläche des Kegels, und mit ihr die beiden Tangenten, wie die Gerade GB sich bewegen, bis sie in die Ebene der Grundrisse zu liegen kommen, so fällt der Mittelpunct C der erstern in D, wenn wir $BD = BC$ machen, der Punct H in P, wenn wir aus F die Senkrechte PQ auf GB ziehen, und OP der Hypothenuse OQ eines rechtwinkligen Dreieckes gleich machen, dessen Catheten OI und IH sind; die beiden Tangenten endlich bleiben Tangenten PM und PF, aus P zu dem Kreise vom Halbmesser $DM = CE$ beschrieben. Die Grundrisse der beiden Berührungspuncte M und F müssen nothwendig in der aus ihnen auf GB gezogenen Senkrechten liegen, und finden sich, wenn wir BM und Bn gleich RM und SF machen, in den Durchschnitten der aus m und n mit BG gezogenen Gleichlaufenden und den Senkrechten MR und SF, in T und V. Offenbar haben nun die beiden durch AH (die Berührungspuncte, deren Grundrisse T und V sind) geführten Ebenen mit jenen der Grund-

risse die Puncte gemein, welche die Verlängerung in *IT* und *IV* in ihren Durchschnitten mit *BG* geben; diese beiden Puncte *a* und *γ* geben daher, mit *A* vereinigt, in *Aa* und *Aγ* die beiden horizontalen Tracen der gesuchten Ebenen.

Die Bestimmung ihrer Aufriſs-Tracen, oder ihres Durchschnittes mit der Ebene der Aufrisse, unterliegt nunmehr nicht der geringsten Schwierigkeit.

§. 32. Die von uns im Laufe dieser Abhandlung gegebenen analytischen sowohl als rein geometrischen Verfahrungsarten zur Bestimmung der gleichbeleuchteten Linien, finden ihre Anwendung auch bei Oberflächen, welche ihre hohle Seite dem Lichtstrahle zuwenden; da es auch bei diesen sich nur darum handelt, jene Puncte derselben auszumitteln, von welchen die Lichtstrahlrichtung mit der tangirenden Ebene den verlangten Einfallswinkel macht.

Nur muſs man nicht unterlassen, den Schatten im Innern der Oberfläche, von ihrem Rande geworfen, besonders zu construiren, um durch ihn die gleichbeleuchteten Linien gehörig abzugränzen.

Fig. 27. Für den Aufriſs der hohlen Halbkugel *ABCDE*, unter der gewöhnlichen Lichtstrahlrichtung, wird dieser Schatten eine halbe Ellipse, deren eine halbe Achse der unter 45° mit der Achse der x und z gezogene Halbmesser *OC*, die andere aber *OF* ein Drittel eben dieses Halbmessers ist. Von den gleichbeleuchteten Linien derselben sind dann nur die Theile 1*a*, 2*b*, 3*c*, 4*D*, 5*e*, ... zu verzeichnen, welche der angeführte Schatten abschneidet. Auch hier kann man die Berührungspuncte der elliptischen Bögen mit dem Umfange des Kreises *CDF*, den leuchtenden Punct etc., besonders nach denen in den §. 14. und §. 9. angeführten Verfahren bestimmen.

II.

Berichtigung meiner Ansicht über die Theorie der Parallellinien;

vom

Dr. und Prof. *Joseph Knar.*

In einem kleinen Aufsatze, welchen das vierte Heft des dritten Bandes dieser Zeitschrift enthält, habe ich versucht, meine Ansicht über die Theorie der Parallellinien darzulegen. Allein ich bin durch sehr schätzbare Bemerkungen, welche mir darüber von mehreren Seiten zugekommen sind, überzeugt worden, daſs ich mich dort nicht durchgängig so unzweideutig ausgedrückt habe, um bedeutenden Miſsverständnissen vorzubeugen: vielmehr konnte vorzüglich die Nichtunterscheidung der entgegengesetzten Richtungen einer geraden Linie und die Unbestimmtheit in dem Begriffe des Dazwischenliegens zu Folgerungen aus meiner aufgestellten Erklärung des Winkels Veranlassung geben, welche nach meiner Ansicht durchaus nicht darin liegen sollen. Ich halte es daher für nothwendig, die erforderliche Berichtigung hier beizufügen.

Meine Absicht ging in jenem Aufsatze zunächst dahin, die Ursache zu erforschen, warum bisher noch keine, völlig genügende, Theorie der Parallellinien gefunden worden sey. Hiebei ging ich von dem, schwerlich zu verwerfenden, Satze aus, daſs sich in einer nicht empirischen Wissenschaft, wie die Mathematik ist, die Eigenschaften der, darin zu betrachtenden, Gegenstände aus ihren Erklärungen vollständig herleiten lassen müssen, daſs daher, sobald eine solche vollständige Herleitung nicht möglich seyn soll, nothwendig in einer, zum

Grunde liegenden, Erklärung ein Mangel unterlaufe. Bei der Theorie der Parallellinien werden nun zunächst nur die Erklärungen einer geraden Linie und eines (geradlinigen) Winkels gebraucht: diese beiden Erklärungen müssen daher vor Allem auf das Sorgfältigste untersucht werden. Sollte sich darin kein wesentlicher Mangel finden; so wird die Schuld des beständigen Miſslingens aller Versuche zur Vervollständigung jener Theorie lediglich an den bisherigen Bearbeitern liegen, und man darf sicher erwarten, daſs durch Fortsetzung dieser Versuche endlich eine vollständige Theorie zum Vorscheine kommen werde: trifft man hingegen in einer von jenen beiden Erklärungen einen wesentlichen Mangel an; so muſs vor allem andern diesem Mangel abgeholfen werden, weil erst dann ein günstiger Erfolg zu hoffen seyn kann.

Von der, allgemein üblichen, Erklärung der geraden Linie glaube ich nicht, daſs man derselben mit Recht einen Vorwurf machen dürfe, worauf sich die Unmöglichkeit einer, völlig befriedigenden, Theorie der Parallellinien gründen könnte. Nicht so vorwurfsfrei aber scheint mir die Erklärung des Winkels zu seyn. Den Winkel, als die Neigung zweier, in einem Puncte zusammentreffender, gerader Linien, zu bestimmen, kann nicht gestattet seyn, weil dabei erst angegeben werden müſste, was man unter *Neigung* zu verstehen habe, da doch die Worte *Winkel* und *Neigung* eigentlich einerlei bezeichnen, und daher durch einander wechselseitig nicht erklärt werden können. Auch die andere noch übliche Erklärung, nämlich: *Winkel ist die Abweichung der Richtungen zweier, in einem Puncte zusammentreffender* (besser: *von einem Puncte ausgehender*) *gerader Linien*, befriediget nicht vollkommen, weil sie, wenn man nicht dem Worte *Abweichung* eine Bedeutung unterle-

gen will, welche sich erst mit Hülfe des Begriffes eines Winkels angeben läſst, über die Beschaffenheit des Winkels eigentlich nichts weiter aussagt, als daſs er durch zwei verschiedene, von einem Puncte ausgehende, gerade Linien entstehe, ohne irgend eine Eigenschaft desselben anzugeben, woraus sich alle übrigen ableiten lassen könnten. Nun muſs jede Erklärung die Vorstellung, welche wir uns von dem zu erklärenden Gegenstande machen, ausdrücken. Geschieht dieser Ausdruck so vollständig, daſs sich daraus *alle* Eigenschaften des Gegenstandes ableiten lassen; so ist die Erklärung vollkommen genügend, und bedarf keines weiteren Zusatzes: ist hingegen jener Ausdruck noch unvollständig; so muſs man denselben ergänzen, d. h. es muſs ein bestimmter Satz ausgesprochen werden, welcher uns über die Beschaffenheit der Vorstellung von dem erklärten Gegenstande erst gänzlich aufklärt. Es ist übrigens der Wesenheit nach ganz gleichgültig, ob man einen solchen Satz in die Erklärung selbst verflechten, oder, was vielleicht zuweilen zur Deutlichkeit beitragen dürfte, abgesondert hinstellen will; nur muſs man auch im letzteren Falle nicht auſser Acht lassen, daſs er stets nur als Vervollständigung der Erklärung angesehen werden dürfe.

Wenn man die obige Erklärung des Winkels aus diesem Gesichtspuncte betrachtet, wird man leicht zugeben, daſs sie nicht der vollständige Ausdruck der Vorstellung sey, welche wir uns von einem Winkel machen. Die Nothwendigkeit einer Ergänzung ist zwar bisher noch nicht ausdrücklich anerkannt worden: deſswegen war sie aber nicht weniger vorhanden und fühlbar, wie man sich sogleich überzeugen kann, wenn man nur bemerken will, daſs in keinem Lehrgebäude der Geometrie bei irgend einem Satze eine Berufung auf jene Erklärung Statt findet; woraus sich ergibt, daſs die Eigenschaf-

ten des Winkels nicht aus der aufgestellten Erklärung desselben hergeleitet werden konnten, sondern daſs dazu ein anderer Satz, als Grundlage, erforderlich war, welcher freilich nicht immer ausdrücklich angegeben wird.

Gesteht man die Nothwendigkeit einer Ergänzung zu der Erklärung des Winkels zu, dann kömmt es nur noch darauf an, zu bestimmen, worin dieselbe bestehen soll. Man hat dafür bisher allgemein folgenden Satz gebraucht: *Jeder Winkel kann aus den beiden Winkeln bestehend gedacht werden, welche seine Schenkel mit einer, zwischen ihnen, durch den nämlichen Punct, und in der nämlichen Ebene gezogenen, Geraden bilden.* Dieser Satz ist nur ein einzelner Fall eines andern, in weit gröſserer Allgemeinheit wahren, Satzes. Was soll uns nun abhalten, sogleich diesen allgemeineren Satz auszusprechen, und zur Grundlage der Theorie des Winkels anzunehmen? Wodurch sollen wir gezwungen werden, da schon eine Annahme nothwendig ist, uns auf jenen einzelnen Fall zu beschränken? Diese Beschränkung kann nur in dem Umstande ihren Grund finden, daſs man vielleicht schon mit Hülfe jenes, in dem angegebenen Satze enthaltenen, einzelnen Falles in den Stand gesetzt ist, die Eigenschaften des Winkels vollständig herzuleiten, und das darauf beruhende Gebäude der Geometrie zu errichten. Dieser Umstand ist aber keineswegs eingetroffen, denn bisher ist es noch Niemanden gelungen, aus jenem beschränkten Satze die, darauf beruhende, Theorie der Parallellinien mit Strenge und Consequenz abzuleiten, obgleich sich seit *Euklid* so viele und so ausgezeichnet scharfsinnige Männer, welchen man oft in andern, ungleich schwieriger zu behandelnden, Zweigen der Mathematik die wichtigsten Entdeckungen verdankt, mit dieser Ableitung beschäftiget haben. Hieraus folgt, daſs Niemand, der überhaupt mit

Strenge und Consequenz in der Mathematik zu Werke gehen will, die Annahme jenes, nur angedeuteten, allgemeineren Satzes, als Ergänzung zur Erklärung des Winkels, zurück zu weisen ein Recht habe, wenn er nicht entweder auch aus dem angegebenen, eingeschränkteren Satze die Theorie der Parallellinien vollständig abzuleiten vermag, oder wenigstens beweisen kann, daſs diese Ableitung, obgleich sie bisher noch nicht gelungen ist, dennoch möglich seyn müsse. Daſs keiner von diesen beiden Bedingungen bisher Genüge geleistet wurde, ist wohl bekannt genug: ich glaube aber sogar zu der Behauptung einen Grund zu haben, daſs es gar nicht möglich sey, aus jenem beschränkten Satze die Theorie der Parallellinien vollständig herzuleiten.

Durch die Annahme jenes Satzes wird nämlich der Winkel allerdings als eine Gröſse, und daher als ein Object der Mathematik dargestellt. Allein mit Hülfe desselben lassen sich nur Winkel unter einander vergleichen, welche entweder einerlei Scheitel haben, oder wenigstens als solche gedacht werden können, kurz Winkel, deren Scheitel *gegeben* sind. Will man aber von Winkeln handeln, deren Scheitel noch nicht gegeben sind; so reicht jener Satz durchaus keinen Anhaltspunct dar, um darüber irgend etwas auszusagen. Es lassen sich also daraus nur *einige*, nicht aber *alle* Eigenschaften der Winkel herleiten. Dieſs zeigt sich bei der Theorie der Parallellinien sehr deutlich. Werden zwei gerade Linien von einer dritten dergestalt geschnitten, daſs zwei innere Winkel zusammen genommen zweien rechten gleich sind; so sind die Scheitel aller dadurch entstehenden Winkel bereits gegeben, und es läſst sich daher ganz leicht erweisen, daſs sich jene zwei Linien nicht schneiden können. Sind hingegen zwei innere Winkel kleiner, als zwei rechte; dann sollen jene Li-

nien unter einander selbst einen Winkel bilden, welcher die beiden andern zu zwei rechten Winkeln ergänzt, und dessen Scheitel noch nicht gegeben ist: hier tritt also wirklich der Fall ein, in welchem der obige eingeschränkte Sa z nicht mehr zureicht, und deſswegen ist es nicht möglich, daraus den so berühmten eilften Grundsatz *Euklid's* vollständig zu erweisen.

Man wird dagegen hoffentlich nicht einwenden, daſs man anstatt des eilften *Euklid'*schen Grundsatzes leicht einen andern Satz aufstellen könnte, aus welchem, wenn er erwiesen wäre, sich die Theorie der Parallellinien ohne Schwierigkeit ableiten lieſse, und bei welchem die Scheitel aller Winkel gegeben sind, z. B. den Satz, daſs die drei Winkel eines jeden Dreieckes zusammen genommen zweien rechten Winkeln gleich seyen. Denn eben der Umstand, daſs ein solcher Satz und der eilfte Grundsatz *Euklid's* dergestalt von einander abhängen, daſs sich jeder von ihnen aus dem anderen herleiten läſst, beweist hinlänglich, daſs die Schwierigkeit, oder vielmehr Unmöglichkeit, welche sich bei dem Beweise des einen darstellt, auch bei dem anderen vorhanden seyn müsse, und nur auf irgend eine Art verdeckt werde.

Bisher habe ich zu erweisen versucht, daſs es zur vollständigen Begründung der Theorie der Parallellinien nothwendig sey, anstatt des oben angegebenen Satzes eine allgemeinere Annahme für die Beschaffenheit des Winkels zu machen: sollte man aber auch die *Nothwendigkeit* einer solchen Annahme nicht zugeben wollen, so kann man doch die *Zulässigkeit* derselben so lange nicht bestreiten, bis man nicht einer von den beiden früher aufgestellten Bedingungen Genüge geleistet haben wird. Ich will nun diesen allgemeineren Satz selbst nach meiner Ansicht darzustellen suchen.

Die gerade Linie, welche von einem Puncte zu ei-

nem anderen gezogen werden kann, bezeichnet die *Richtung* von dem ersteren gegen den letzteren Punct: die Richtung von dem letzteren gegen den ersteren Punct heiſst der vorigen *entgegen gesetzt.* Denkt man sich nun die gegenseitigen Richtungen zweier Paare von Puncten der nämlichen geraden Linie, so werden diese Richtungen paarweise bald zusammen fallen, und dann beständig mit einander vereinigt bleiben, so weit man dieselben auch fortgesetzt sich denken mag. Jede gerade Linie bezeichnet daher nur zwei einander entgegengesetzte Richtungen, und es ist ganz gleichgültig, ob man dieselben von dem nämlichen, oder von verschiedenen Puncten anfangend sich vorstellen will, da ohnehin auf die Länge der Linie dabei keine Rücksicht genommen wird. Gehen aber von einem Puncte zwei verschiedene gerade Linien aus, so sagt man, ihre Richtungen weichen von einander ab. Diese Abweichung kann, wenn man gleich von jeder Linie nur eine ihrer Richtungen betrachtet, auf zweifache Weise genommen werden. Denn jede gerade Linie hat zwei Seiten, daher kann auch die Abweichung der Richtung einer geraden Linie von einer zweiten entweder von der einen oder der andern Seite der letzteren betrachtet werden. Es entstehen also durch die Abweichung zweier Richtungen jederzeit nicht bloſs ein, sondern zwei Winkel. Derjenige von diesen Winkeln, bei welchem die Abweichung eines Schenkels auf der nämlichen Seite des andern genommen wird, auf welcher jener Schenkel selbst liegt, heiſst der concave (hohle), der andere aber der convexe (erhabene oder erhobene) Winkel. Es ist bekannt, daſs man in der Regel den hohlen Winkel zu verstehen habe, wenn es nicht entweder ausdrücklich bemerkt wird, oder sich von selbst aus der Natur der Sache ergibt, daſs der andere Winkel gemeint sey.

Setzen wir nun, daſs von der nämlichen Richtung einer geraden Linie *A*, in der nämlichen Ebene, jedoch auf verschiedenen Seiten derselben, die Richtungen zweier andern geraden Linien, *B* und *C*, abweichen. In einem solchen Falle können die Richtungen *B* und *C* selbst wieder von einander abweichen. Man kann sich daher vorstellen, daſs die Richtung *C* zuerst nach *A*, und dann die *A* noch weiter nach *B* abgewichen sey, so daſs die Abweichung der *B* von *C* entsteht, indem zu der Abweichung der *A* von *C* noch die Abweichung der *B* von *A* hinzu kömmt, oder mit andern Worten, man nimmt die Abweichung der *B* von *C* für so groſs an, als die Abweichungen der *A* von *C* und der *B* von *A* zusammen genommen. Dieser Satz gibt die Beschaffenheit der Vorstellung an, welche wir von der Abweichung der Richtungen gerader Linien haben, und hieraus müssen sich alle übrigen Eigenschaften des Winkels herleiten lassen, wozu er auch, wie man leicht selbst sehen wird, vollkommen zureichend ist, wenn er nur in seiner ganzen hier ausgesprochenen Allgemeinheit genommen, und nicht bloſs auf den, schon oben angeführten, einzelnen Fall beschränkt wird.

Dem Gesagten gemäſs kann die Erklärung des Winkels sammt ihrer, für nothwendig befundenen, Ergänzung auf folgende Art ausgedrückt werden: *Die Abweichung der Richtungen zweier, von einem Puncte ausgehender, gerader Linien bildet einen Winkel; die abweichenden Linien selbst heiſsen die Schenkel desselben. Diese Abweichung stellt man sich dergestalt vor, daſs sie auch, nach und nach entstanden, gedacht werden kann, wenn von dem einen Schenkel in der nämlichen Ebene eine andere gerade Linie, und von dieser auf der andern Seite derselben erst der zweite Schenkel abweicht.*

Ich habe bis jetzt hoffentlich deutlich genug ge-

zeigt, wie nach meiner Ansicht die Vordersätze, welche der Theorie der parallelen Linien zum Grunde liegen, vorgetragen werden sollen. Man mag nun diese Ansicht für richtig anerkennen, oder nicht; man wird sie wenigstens nicht so leicht miſsverstehen können. Die Folgerungen daraus sind so einfach, daſs sie Jedermann leicht selbst ableiten kann.

Es bleibt mir nur noch übrig, die Bedeutung des Ausdruckes: *etwas liege zwischen den Schenkeln eines Winkels*, anzugeben, um die daraus entsprungenen Irrungen aufzuklären.

Man sagt, etwas liege in einer Ebene zwischen zwei geraden Linien, wenn es auf derjenigen Seite einer jeden von diesen zwei Geraden liegt, auf welcher die andere gelegen ist. Hieraus ist es leicht, zu beurtheilen, ob ein Punct oder eine Linie zwischen den Schenkeln eines Winkels liege, oder nicht. Will man nun behaupten, daſs eine von den Richtungen einer geraden Linie zwischen den Schenkeln eines Winkels liege; so ist es offenbar nicht genug, wenn nur ein Stück jener Geraden dazwischen liegt, weil sonst die Richtung, weiter fortgesetzt, immer noch auſserhalb fallen könnte, sondern diese Richtung muſs, von irgend einem Puncte angefangen, man mag sie so weit ſortgesetzt denken, als man will, ganz zwischen den Schenkeln des Winkels liegen.

In der eben erklärten Bedeutung sind diese Ausdrücke auch in meiner früheren, hieher gehörigen, Abhandlung gebraucht worden; wobei ich nur noch bemerken muſs, daſs ich unter dem Ausdrucke: *eine gerade Linie sey zwischen den Schenkeln eines Winkels gezogen*, verstanden haben wollte, eine ihrer Richtungen liege dazwischen, was freilich sehr leicht miſsverstanden werden konnte, da man nicht immer diese bestimmte Be-

deutung mit jenem Ausdrucke verbindet, worin eben auch die Ursache liegt, aus welcher ich jenen Ausdruck bei der vorhergehenden Darstellung meiner Ansicht gänzlich übergangen habe. Aus diesem Gesichtspuncte betrachtet ist es zwar allerdings wahr, daſs jede Seite eines Dreieckes zwischen den Schenkeln des gegenüber stehenden Winkels liege: allein keine der Richtungen jener Seite kann dazwischen liegen, daher fallen alle Folgerungen von selbst weg, welche man unter dieser Voraussetzung aus meiner, in der früheren Abhandlung aufgestellten, Erklärung des Winkels ziehen wollte. Deſswegen erlaube ich mir auch nicht, die Geduld des Lesers noch ferners in Anspruch zu nehmen, um diese Folgerungen genauer zu betrachten, und das darin liegende, nach meiner Ansicht Irrige aufzudecken.

III.

Uber die Grundgesetze der Wärme, und über das wahre Maſs der Temperaturen;

von

Joseph Schitko,

k. k. Bergrath und Professor zu Schemnitz.

Die Ausdehnung der Körper durch die Wärme wird als eine Grundwirkung der Wärmethätigkeit betrachtet. Allein das allgemeine Gesetz, nach welchem sich diese Wirkung richtet, ist noch immer nicht bekannt. Die Kenntniſs dieses Gesetzes muſs uns aber um so wichtiger erscheinen, als nicht nur die Theorie über die Wärme, sondern auch die Thermometer, die Höhenmessungen durch Barometer, die astronomische Strah-

lenbrechung, die Kraft der Dämpfe, und die Wärme-Correctionen bei verschiedenen Messungen davon abhängen. Die Wichtigkeit dieses Gegenstandes ist durch die vielfältigen Bemühungen, die man bisher darauf verwendete, ohnehin anerkannt. Als ich eine Untersuchung über die Kraft der Dämpfe anstellte, wurde ich bald gewahr, dafs es dabei vor Allem auf eine genaue Bestimmung der Ausdehnung durch die Wärme, und auf ein richtiges Mafs der Temperaturen ankomme; und ich fand mich genöthigt, meine Untersuchung erst auf diese Gegenstände zu richten, bevor ich die Erforschungen über die Dämpfe fortsetzen konnte. Das, was ich dabei gefunden zu haben glaube, will ich hiemit zu weiterer Beurtheilung mittheilen. Ich will mich aber in die Darstellung von allen dem, was bisher in dieser Hinsicht geleistet wurde, nicht einlassen. Man findet es ohnehin in dem neu bearbeiteten physikalischen Wörterbuche von *Gehler* zusammengestellt. Es wird für die gegenwärtige Absicht zureichen, wenn ich hier nur andeute, dafs man im Allgemeinen die Ausdehnung der Körper durch die Wärme als gleichförmig, und mit den Unterschieden der Temperaturen verhältnifsmäfsig betrachte; dafs sich auf diese Annahme die Eintheilung der Thermometer-Scalen in gleiche Grade gründe; dafs es aber nicht an Beobachtungen fehle, die eine Ungleichheit in der Ausdehnung zu beweisen scheinen, und dafs schon *Dalton* die Hypothese aufstellte, nach welcher alle permanent elastischen Flüssigkeiten sich in einer geometrischen Progression ausdehnen sollen, wenn die Wärme in einer arithmetischen wächst; dagegen sollen alle homogenen Flüssigkeiten vom Puncte des Gefrierens oder ihrer gröfsten Dichtigkeiten sich um Gröfsen ausdehnen, welche sich wie das Quadrat der Temperaturen verhalten.

Wenn man berechtigt wäre, die Ausdehnung eines gegebenen Körpers als gleichförmig anzunehmen: so dürfte man nur die durch Versuche gefundene Raumvergröſserung durch die Anzahl der Wärmegrade, bei der sie Statt gefunden hat, dividiren, um die Raumvergrösserung für einen Grad zu erhalten. Würde man finden, daſs sich ein gegebener Körper, dessen Rauminhalt beim natürlichen Gefrierpuncte gleich Eins gesetzt wird, bei dem ersten Wärmegrade um den $\frac{1}{m}$ten Theil seines ursprünglichen, zur Einheit angenommenen Raumes ausdehnt: so lieſse sich dessen Volumen bei y Wärmegraden über den Gefrierpunct aus der Formel $1 + \frac{y}{m}$ berechnen. Allein die Versuche, die man über die Ausdehnung fester, tropfbar flüssiger, und expansibler Körper angestellt hat, scheinen diese Annahme wenig zu begünstigen. Sie beschränken sie höchstens nur noch auf kleine Temperatursabstände. Die Ausdehnung fester Körper, insbesondere schwer schmelzbarer Metalle, will man innerhalb der beiden festen Puncte des Thermometers gleichförmig gefunden haben; indeſs behauptet *De Luc*, eine Ungleichheit in der Ausdehnung des Glases wahrgenommen zu haben. *Hallström* hat ebenfalls eine zunehmende Ausdehnung beim Eisen innerhalb der fixen Puncte des Thermometers gefunden. Daſs aber eine zunehmende Ausdehnung aller festen Körper in weit über den Siedepunct hinausgehenden Temperaturen Statt finde, ist durch die neuesten Versuche, welche *Dulong* und *Petit* mit groſser Sorgfalt angestellt haben, erwiesen. Bei tropfbaren Flüssigkeiten findet eine so bedeutende Abweichung von der angenommenen Gleichförmigkeit Statt, daſs man für eine jede eine besondere Formel aufzusuchen genöthigt war. Die Ausdehnung expansibler

Flüssigkeiten will *Gay-Lussac* innerhalb dem Gefrier- und Siedepuncte regelmäfsig, und mit dem Quecksilber übereinstimmend gefunden haben. *Dalton* gibt dagegen an, dafs innerhalb dieser Puncte ein Luftthermometer etwa um einen Grad, uud zwar um die Mitte der Scala vorauseile, dann aber beim Siedepuncte mit dem Quecksilberthermometer wieder zusammentreffe. In hohen Temperaturen sind nur wenige Versuche angestellt worden, und die Ergebnisse dieser Versuche begünstigen das Gesetz der gleichförmigen Ausdehnung nicht. *Dulong* und *Petit* haben hierüber die zuverläfsigsten Versuche angestellt, die in *Annales de Chimie et de Physique, VII.*, 138, oder in *Gilbert's* Annalen der Physik, LVIII., 254, oder in *Schweigger's* Journal der Physik und Chemie, XXV., 304, mitgetheilt erscheinen.

Wenn erwogen wird, dafs sich die beobachtete Gleichförmigkeit nur auf enge Gränzen der Temperaturen und nur auf solche Körper beschränkt, die ihren Aggregatzustand erst in weit entlegenen Temperaturen ändern, so wird man geneigt seyn zu glauben, dafs vielmehr die Ungleichförmigkeit in der Ausdehnung vorherrsche, und dafs sie nur da, wo die Ausdehnung gegen ihren weit entfernten Endpunct langsam fortschreitet, innerhalb enger Gränzen nicht bemerkbar erscheine. Allein nicht nur die Beobachtungen, sondern auch die Theorie spricht sich gegen die Annahme einer gleichförmigen Ausdehnung aus. Es ist nicht einzusehen, warum sich ein gegebener Körper für jeden Wärmegrad um einen und denselben aliquoten Theil seines ursprünglichen, das ist, bei einer bestimmten Temperatur zur Einheit angenommenen Raums, ausdehnen solle, und warum dieser aliquote Theil nicht vielmehr auf den Raum bezogen werden sollte, den der Körper bei jedem vorausgehenden Wärmegrade behauptete. Wenn sich ein

gegebener Körper, dessen anfängliches Volumen etwa beim natürlichen Gefrierpunct v ist, um den $\frac{1}{m}$ Theil dieses Raumes bei dem ersten Wärmegrade ausdehnt; so muſs dann sein Rauminhalt $v' = v\left(1 + \frac{1}{m}\right)$ seyn. Wird dieser Körper, dessen Volumen nun v' ist, abermals um einen gleichen Grad in seiner Temperatur erhöhet; so wird er aus einem gleichen Grunde, wie vorhin, den Raum

$$v'' = v'\left(1 + \frac{1}{m}\right) = v\left(1 + \frac{1}{m}\right)^2,$$

und überhaupt bei x Wärmegraden den Raum $v\left(1 + \frac{1}{m}\right)^x$ einnehmen müssen. Wird der anfängliche Raum beim natürlichen Gefrierpuncte zur Einheit gesetzt; so hat man das Volumen des Körpers $= \left(1 + \frac{1}{m}\right)^x$. Bezieht sich der ursprüngliche Raum nicht auf den natürlichen Gefrierpunct, sondern auf irgend einen andern Wärmegrad x', so wird der Rauminhalt des Körpers bei x Graden $= \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{x-x'}$ seyn.

Diese Vorstellungsart setzt aber voraus, daſs die Körper der ausdehnenden Kraft der Wärme entweder keinen, oder einen sich immer gleich bleibenden Widerstand entgegensetzen. Diese Voraussetzung kann nur bei expansibeln Flüssigkeiten Statt finden. Tropfbare Flüssigkeiten und feste Körper lassen einen ungleichen Widerstand vermuthen, der mit der zunehmenden Raumvergröſserung abnimmt. So wie nun dieser Widerstand geringer wird, muſs die Ausdehnung für jeden Wärmegrad gröſser ausfallen, als sie bei constantem Widerstande seyn würde. Man kann sich aber unbeschadet der Sache vorstellen, als würden die Incremente, um

welche sich der Körper wegen des abnehmenden Widerstandes mehr ausdehnt, durch einen vermehrten Einfluſs der Wärme entstehen, und es kommt nur darauf an, zu bestimmen, um was die Wärmegrade x vermehrt werden müssen, um die gesammte Ausdehnung des Körpers zu erhalten. Nach der Analogie des *Newton*'schen Gesetzes für die Gravitation glaubte ich annehmen zu können, daſs die Incremente der Wärme, welche in der Wirkung mit dem abnehmenden Widerstande gleichgeltend seyn sollen, das quadratische Verhältniſs befolgen werden. Wenn nun ein solches Increment mit a bezeichnet, und wenn ferner angenommen wird, daſs ein gegebener Körper bei constantem Widerstande für den ersten Wärmegrad den Raum $\rho = 1 + \frac{1}{m}$ einnehmen würde, so müſste dieser Raum wegen des nachgelassenen Widerstandes in

$$\rho' = \rho \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{a} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{1+a}$$

übergehen. Bei dem zweiten Wärmegrade würde der Körper den Raum

$$\rho'' = \rho' \left(1 + \frac{1}{m}\right) = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{2+a}$$

einnehmen, wenn der Widerstand unverändert derselbe bliebe, wie er zu Ende des ersten Wärmegrades war; da er aber wieder nachläſst, und dadurch die Ausdehnung so gewinnt, als wenn die Temperatur um $3a$ erhöht worden wäre; so wird das eigentliche Volumen desselben

$$\rho''' = \rho'' \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{3a} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{2+4a}$$

seyn. Aus gleichem Grunde erlangt der Körper bei dem dritten Grade den Raum $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{3+9a}$, und über-

haupt bei x Wärmegraden den Raum $v = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{x + ax^2}$

Will man $\frac{1}{m} = \mu$ setzen, so hat man

$v = (1 + \mu)^{x + ax^2}$ und $\log. v = (x + ax^2) \log. (1 + \mu)$.

Dieſs wäre nun das allgemeine Gesetz, nach welchem sich die Körper durch die Wärme ausdehnen.

Um aber die Gröſsen α und μ für jeden gegebenen Körper zu bestimmen, sind zwei durch Versuche gegebene Fälle erforderlich. Es sey nun bekannt, daſs das Volumen eines gegebenen Körpers bei x und X Wärmegraden v und V sey, so ist

$$\log. v = (x + \alpha x^2) \log. (1 + \mu) \text{ und}$$
$$\log. V = (X + \alpha X^2) \log. (1 + \mu),$$

woraus sich $\log. (1 + \mu) = \frac{\log. V}{X + \alpha X^2}$ oder

$$= \frac{\log. v}{x + \alpha x^2} \text{ und } \alpha = \frac{x \log. V - X \log. v}{X^2 \log. v - x^2 \log. V}$$

ergibt.

Um nun zu sehen, wie dieses aufgestellte Gesetz mit den über die Ausdehnung verschiedener Körper angestellten Versuchen übereinstimmen werde: muſs vor allen auf die Beschaffenheit der Thermometer Rücksicht genommen werden, weil diese allen Beobachtungen über die Wärme und über die durch dieselbe bewirkte Ausdehnung zu Grunde liegen.

Nach dem Grundsatze, daſs die Ausdehnung des Quecksilbers mit der Zunahme der Temperatur gleichförmig fortschreitet, theilt man die Thermometerscale in vollkommen gleiche Theile oder Grade ein. Indeſs wollen einige Physiker, namentlich *Roy*, eine zunehmende Ausdehnung des Quecksilbers wahrgenommen haben. *Robinson* hat diese Behauptung als giltig angesehen. *De Luc* vermuthete dasselbe, weil das Quecksil-

berthermometer in Mischungen aus Wasser von verschiedenen Temperaturen nicht das arithmetische Mittel beider, sondern stets etwas weniger zeigte. Derselbe hat auch Thermometer, die mit verschiedenen Flüssigkeiten gefüllt waren, verglichen, aber keine Übereinstimmung der Wärmegrade bei gleichen Temperaturen gefunden. Daſs nach *Dalton's* und *Dulong's* Beobachtungen zwischen einem Quecksilber- und Luftthermometer auch keine genügende Übereinstimmung Statt finde, ist bereits früher erwähnt worden.

Schon der Umstand, daſs die verschiedenen Thermometer unter sich nicht völlig übereinstimmen, gibt deutlich zu erkennen, daſs die Eintheilung der Thermometerscalen in gleiche Theile oder Grade das wahre Maſs der Temperaturen nicht abgeben könne. Das von mir angegebene Gesetz verlangt offenbar eine ungleiche Eintheilung der Thermometerscale. Es kommt nur darauf an, ob hiedurch die angestellten Beobachtungen in eine nähere Übereinstimmung gebracht werden. Bei dieser Untersuchung muſs man von einem bestimmten Körper ausgehen. Die Luft scheint sich dazu besonders zu eignen; denn bei dieser ist es wahrscheinlich, daſs sie der ausdehnenden Kraft der Wärme keinen, oder wenigstens keinen ungleichen Widerstand entgegensetzt. Für diese Annahme spricht vorzüglich der Umstand, daſs bei keinem andern Aggregatzustande der Körper eine vollkommenere Übereinstimmung in der Ausdehnung, als bei den expansibeln Flüssigkeiten, gefunden wurde. Ein Luftthermometer würde daher die Wirkung der Wärme rein, und abgesondert von dem Einflusse einer andern Kraft darstellen. Da aber das Quecksilberthermometer mehr im Gebrauche ist, und beinahe allen Beobachtungen über die Ausdehnung zu Grunde liegt, so werde ich vor der Hand von diesem ausgehen, und das Luftther-

mometer damit in Übereinstimmung zu bringen suchen. Sowohl das Quecksilber- als das Luftthermometer müssen in Bezug auf die alte und neue Eintheilung der Scalen von einem und demselben Wärmegrade, als einem ursprünglichen gleichen Maſsstabe, ausgehen. Ich nehme zu diesem Ende den ersten Wärmegrad einer hunderttheiligen Scale des Quecksilberthermometers an. Nach genauen, durch *Dulong* und *Petit*, angestellten Versuchen dehnt sich das Quecksilber vom natürlichen Gefrierpuncte bis zum Siedepuncte um 0,018018, mithin für den ersten Grad um 0,00018018 des beim Gefrierpuncte zur Einheit angenommenen Raumes aus. Es wird daher diese Gröſse, die ich der Kürze wegen μ' nennen will, zu Grunde gelegt. Wenn man nun die Wärmegrade der hunderttheiligen Scale mit y, und die eigentlichen wahren Grade für dieselbe Temperatur mit x bezeichnet, so muſs

$$1 + \mu' y = (1 + \mu)^{x + \alpha x^2} \quad \text{und}$$
$$\log.(1 + \mu' y) = (x + \alpha x^2) \log.(1 + \mu)$$

seyn; woraus sich dann die gegebenen Grade der Centesimal-Scale in die eigentlichen Temperatursgrade übersetzen lassen, wenn μ und α bekannt seyn werden.

Beim Luftthermometer ist $\alpha = 0$, und daher

$$1 + \mu' y' = (1 + \mu)^x \quad \text{und}$$
$$\log.(1 + \mu' y') = x \log.(1 + \mu);$$

wo aber unter y' die gemeinen Grade des Luftthermometers zu verstehen sind. Nach *Gay-Lussac's* genauen Versuchen dehnen sich die Luſtarten zwischen den beiden fixen Puncten des Luftthermometers im Mittel um 0,375 aus.

Wird nun diese Gröſse unter hundert Grade gleichförmig vertheilt, so ergibt sich $\mu' = 0{,}00375$. Der Werth von μ muſs insbesondere bestimmt werden.

Da die Ausdehnung des Quecksilbers für den ersten Centesimalgrad bekannt ist, indem sie als Maſsstab der Eintheilung zu Grunde liegt; da ferner die Gröſsen, um welche sich das Quecksilber und die Luft beim Siedepuncte, und nach *Dulong's* und *Petit's* Versuchen auch in höhern Temperaturen ausdehnen, gegeben sind: so lassen sich aus diesen Daten die Werthe von α und μ leicht bestimmen. Ich finde für das Quecksilber

$$\alpha = 0{,}0029991969 \quad \text{und} \quad \log.(1+\mu) = 0{,}0000780101,$$

für die Luft

$$\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \log.(1+\mu) = 0{,}0017255612.$$

Werden nun diese Werthe in die gegebenen Gleichungen für das Quecksilber- und Luftthermometer substituirt; so ergeben sich die Formeln, nach welchen sich die gemeinen hunderttheiligen Grade in die eigentlichen Temperaturgrade übersetzen lassen. Es ist nämlich für das Quecksilberthermometer:

$$x = \frac{-1+\sqrt{1+153{,}7850506 \log.(1+0{,}00018018\,y)}}{0{,}00599839},$$

und für ein Luftthermometer:

$$x = \frac{\log.(1+0{,}00375\,y')}{0{,}00172556}.$$

Aus den nachstehenden Tafeln ist zu ersehen, wie das aufgestellte Gesetz mit den Beobachtungen, die man über die Ausdehnung verschiedener Körper angestellt hat, übereinstimme. Die erste Columne enthält die gemeinen Centesimalgrade des Quecksilberthermometers, bei welchen die Versuche vorgenommen wurden. In der zweiten sind diese Grade auf die eigentlichen wahren Temperaturgrade übersetzt, die ich mit W^0 bezeichnet habe. Die dritte Columne enthält die Ergebnisse der Versuche nebst den Namen der Beobachter; in der vierten Spalte sind die Resultate eingetragen, die sich

durch Berechnung nach dem aufgestellten Gesetze $v = (1 + \mu)^{x + ax^2}$ ergeben haben; die fünfte Columne endlich gibt die Differenzen zwischen der Beobachtung und Berechnung an. Die Gröſsen α und μ, oder log. $(1+\mu)$, sind aus zwei gegebenen Fällen nach der früher angegebenen Art berechnet worden.

Ausdehnung der Luft.

$\alpha = 0$; $\log. (1 + \mu) = 0{,}00172556$.

Quecksilberthermometer		Volumen der Luft.			Differenzen.
Centesimalgrade.	W°	Beobachtet.		Berechnet.	
0	0	1,0000		1,0000	0
25	23,38133	1,0965	Luz.	1,0973	+ 0,0008
50	44,09769	1,1900		1,1915	+ 0,0015
75	62,87235	1,2860		1,2838	— 0,0022
100	80,14940	1,3750		1,3750	0
150	111,13111	1,5576	Dulong.	1,5551	— 0,0025
200	139,07656	1,7389		1,7377	— 0,0012
250	165,39838	1,9189		1,9293	+ 0,0104
300	187,56359	2,1094		2,1069	— 0,0025
360	213,35688	2,3125		2,3343	+ 0,0218

Da die Differenzen abwechselnd positiv und negativ erscheinen, so dürften sie den möglichen Beobachtungsfehlern zuzuschreiben seyn. Dieſs wird um so wahrscheinlicher, als diese Versuche besonders in hohen Temperaturen aus Mangel eines festen Punctes nicht leicht zu bewerkstelligen sind. Auch sollen *Dulong* und *Petit* die angesetzten Gröſsen nicht unmittelbar, sondern durch ein einfaches Interpoliren gefunden haben. (*Gilbert's* Annalen, 58. Band, Seite 264.)

Wenn man die berechnete Ausdehnung bei 50 Cent.° auf die gemeinen Centesimalgrade reducirt; so erhält man $\frac{0{,}1915}{0{,}00375} = 51{,}0667^\circ$, also gerade das, was *Dalton*

beobachtet haben will, nämlich dafs das Luftthermometer um die Mitte der Scale um einen Grad voreile. Die durch *Dalton* und *Gay-Lussac* aufgestellte Behauptung, dafs alle Dämpfe ohne Unterschied sich genau wie die permanenten Gasarten ausdehnen, stimmt mit dem aufgestellten Gesetze vollkommen überein; denn da bei diesen eben so wenig, wie bei allen übrigen expansiblen Flüssigkeiten, ein Widerstand Statt finden kann: so mufs auch hier die Wärme rein und ungehindert wirken. Es mufs daher auch bei Dämpfen $\alpha = 0$ und $v = (1 + \mu)^x$, oder $\log. v = x \log. (1 + \mu)$ seyn. Zufolge der Versuche dehnt sich der Dampf vom natürlichen Gefrierpuncte bis zum Siedepuncte ebenfalls um 0,375 aus. Es ist daher eben so wie bei der Luft $\log. (1 + \mu) = 0,00172556$ zu setzen. Es lassen sich hiernach die Räume, welche der Dampf in verschiedenen Temperaturen annimmt, aus $\log. v = 0,00172556\, x$ leicht berechnen.

Ausdehnung des Quecksilbers.

$\alpha = 0,0029991969$; $\log. (1 + \mu) = 0,0000780101$.

Luftthermometer.		Volumen des Quecksilbers.		Differenzen.
Cent.°	W°	Beobachtet.	Berechnet.	
200	140,8426	1,0363	1,0366	+ 0,0003
300	189,7073	1,0552	1,0549	— 0,0003

Dulong und *Petit* haben die Versuche über die Ausdehnung des Quecksilbers, im Vergleich mit der Luftausdehnung, angestellt, und aus mehrern Versuchen das Mittel gezogen. Sie sind in *Schweigger's* Journal, Band 25, Seite 314, enthalten.

Die Wärmegrade des Luftthermometers habe ich nach der Formel $x = \frac{\log. (1 + \mu' \gamma)}{\log. (1 + \mu)}$, $\mu' = 0,00375$ und

$\log.(1+\mu) = 0{,}00172556$ in die eigentlichen Temperaturen übersetzt, und hierauf die Ausdehnung des Quecksilbers aus $\log. v = (x + \alpha x^2) \log.(1+\mu)$ berechnet.

Ausdehnung des Wassers.

$\alpha = 2{,}53970053$; $\log.(1+\mu) = 0{,}000001296$.

Quecksilbertherm.		Volumen des Wassers.		Differenzen.
Cent.°	W°	Beobachtet.	Berechnet.	
4	3,96279	1,00000 Gilpin.	1,00000	0,00000
5	4,94000	1,00001 Gilpin.	1,00001	0,00000
10	9,73749	1,00027 Gilpin.	1,00027	0,00000
15	14,40382	1,00086 Gilpin.	1,00086	0,00000
20	18,94886	1,00176 Gilpin.	1,00175	— 0,00001
25	23,38133	1,00292 Gilpin.	1,00292	0,00000
100	80,14942	1,0466 *Dalton.* 1,0433 *Kirwan.* 1,04495 Durchschnitt	1,04497	+ 0,00002

Da das Wasser nach *Hallström's* Beobachtungen bei 4,004 C° die gröſste Dichtigkeit annimmt; so habe ich dessen Volumen bei 4 Cent.° zur Einheit gesetzt, und von da die Ausdehnung für die angesetzten Temperaturen berechnet. Die Werthe von α und $\log.(1+\mu)$ sind aus den bei 10 und 25 C° gefundenen Resultaten bestimmt worden. Die *Gilpin*'schen Beobachtungen habe ich aus *Gilbert's* Annalen der Physik, Band 58, Seite 287, entlehnt.

Ausdehnung des Eisens.

$\alpha = 0{,}01116219$; $\log.(1+\mu) = 0{,}00000399$.

Quecksilbertherm.		Längenausdehnung des Eisens.		Differenzen.
Cent.°	W°	Beobachtet.	Berechn.	
0	0	1,000000 Hallström.	1,000000	—
20	18,94886	1,000211 Hallström.	1,000211	0,000000
40	36,07627	1,000453 Hallström.	1,000465	+0,000012
60	51,81133	1,000734 Hallström.	1,000751	+0,000017
80	66,43649	1,001063 Hallström.	1,001063	0,000000
100	80,14942	—	1,001396	—

Die Versuche, die *Hallström* über die Längenausdehnung des Eisens angestellt hat, habe ich aus *Gilbert's* Annalen, Band 36, Seite 64, entnommen, und die Grössen α und log. $(1+\mu)$ aus den Versuchen des 20sten und 80sten Wärmegrades berechnet.

Ausdehnung des Kupfers.

$\alpha = 0{,}00336067$; log. $(1 + \mu) = 0{,}000007317$.

Quecksilbertherm.		Längenausdehnung des Kupfers.		Differenzen.
Cent.°	W°	Beobachtet.	Berechnet.	
0	0	1,000000	1,000000	0,000000
25	23,38133	1,000425 } *Horner.*	1,000425	0,000000
50	44,09769	1,000844 } *Horner.*	1,000852	+0,000008
75	62,87235	1,001284 } *Horner.*	1,001284	0,000000
100	80,14942	1,001722 *Lavoisier.*	1,001730	+0,000008

Ausdehnung des Zinks.

$\alpha = 0{,}0046175$; log. $(1 + \mu) = 0{,}0000116$.

Quecksilbertherm.		Längenausdehnung des Zinks.		Differenzen.
Cent.°	W°	Beobachtet.	Berechnet.	
0	0	1,000000	1,000000	0,000000
25	23,38133	1,000696 } *Horner.*	1,000696	0,000000
50	44,09769	1,001408 } *Horner.*	1,001418	+0,000010
75	62,87235	1,002154 } *Horner.*	1,002169	+0,000015
100	80,14942	1,002954 } *Horner.*	1,002954	0,000000

Ausdehnung des Glases.

$\alpha = 0{,}07722248$; log. $(1 + \mu) = 0{,}000000764$.

Quecksilberthermom.		Längenausdehn. d. Glases.		Differenzen.
Cent.°	W°	Beobachtet.	Berechnet.	
0	0	1,000000	1,000000	0,000000
10	9,737497	1,000000	1,000030	0,000000
20	18,94886	1,000081	1,000082	+ 0,000001
30	27,70893	1,000153	1,000153	0,000000
100	80,14942	—	1,001014	—

Die Versuche über die Ausdehnung des Glases sind von *Hallström* angestellt worden. Ich entlehnte sie aus *Poggendorf's* Annalen der Physik, Band 77, Seite 159. Es wird aber nicht angegeben, mit welcher Glassorte sie vorgenommen wurden. Auch erstrecken sich siese Versuche nicht über den 30sten Cent.°. Die Berechnung gibt nach diesen Anhaltspuncten die Längenausdehnung des Glases beim Siedepuncte 1,001014. Diefs kommt dem von *Berthoud* gefundenen Resultate 1,000991 ziemlich nahe.

Um aus der linearen Ausdehnung die kubische, und umgekehrt aus dieser jene zu erhalten, mufs, wie leicht einzusehen ist, die entsprechende Gröfse log. $(1 + \mu)$ im ersten Falle mit 3 multiplicirt, und im zweiten mit 3 dividirt werden.

(Die Fortsetzung folgt.)

IV.

Über eine vortheilhafte Darstellung des Digitalins, oder des wirksamen Princips der Blätter der *Digitalis purpurea*;

von

Joh. N. Planiawa.

Unter den vielen eigenthümlichen Bestandtheilen der Pflanzen, welche sich in chemischer Hinsicht theils alkalisch, theils aber indifferent gegen die Säuren verhalten, und im ersten Falle mit dem passenden Namen Alkaloide (Pflanzenalkaloide) belegt werden, erfreuen sich bereits mehrere einer Aufnahme in die Zahl der Heilmittel, weil der denkende Arzt von dem richtigen

Grundsatze ausgeht: »dafs in dem eigenthümlichen Bestandtheile der Pflanze auch ihre eigenthümliche Wirkung vorhanden seyn müsse, und dafs dieser eigenthümliche Stoff seinen Zwecken um so entsprechender sey, als er durch ihn blofs die beabsichtigte Wirkung, ohne alle oft so lästigen Nebenwirkungen, welche bei Anwendung des ganzen Pflanzentheils unausbleiblich sind, im kranken Organismus hervorzubringen vermöge.« Unter diese eigenthümlichen Pflanzenstoffe gehört nun auch das seit einiger Zeit in Anwendung gekommene Digitalin, welches *Aug. Le Royer* durch Behandlung trockener Digitalisblätter mit Äther in einem Autoclave, Verdünstung der erhaltenen Flüssigkeit, Auflösung des Rückstandes mit Wasser, Behandlung dieser wässerigen Lösung mit Bleioxydhydrat, neuerliche Verdünstung der Flüssigkeit zur Trockne und Behandlung des Rückstandes mit Äther, und endliche Verdünstung dieses ätherischen Auszuges zur Trockne, als eine braune, schmierige Masse erhielt, welche die ursprüngliche Farbe des Lackmus langsam bläute, an der Atmosphäre zerflofs, sich folglich sehr leicht im Wasser, aber auch im Alkohol und Äther löste, und in sehr kleinen Gaben gereicht die giftigen Wirkungen der *Digitalis purpurea* hervorbrachte.

Angeführte Darstellungsmethode ist sehr kostspielig, und liefert in einigen Fällen sogar nur 80 Gran aus 16 Unzen Blätter.

Da ich indessen die sehr grofse Löslichkeit dieses Stoffes im Wasser, so wie jene seiner Verbindung, in welcher es in den Digitalisblättern vorkommt, besonders auffafste: so fühlte ich mich veranlafst, diesen Stoff auf eine viel einfachere und weniger kostspielige Weise darzustellen, und fand, dafs auch die Quantität desselben bei Anwendung der nachstehenden Bereitungsart, im

Verhältnifs gegen *Le Royer's* seine, bei weitem gröfser ausfalle.

5 Pfund Digitalisblätter wurden zwei Mal mit destillirtem Wasser, jedes Mal durch einige Stunden, gekocht, sämmtliche abgeklärte Flüssigkeit zur Consistenz eines flüssigen Extracts verdünstet, und dieses hierauf mit Äther übergossen. Unter öfterem Umschütteln blieb das Ganze durch einige Tage in mäfsiger Temperatur stehen, worauf der überschwimmende, nun grüngefärbte Äther abgezogen wurde. Seiner Farbe nach enthielt er Chlorophyl, und mufste auch die Digitalinverbindung der angewandten Pflanzenblätter enthalten. Er wurde, mit 4 Unzen Wassers versetzt, der Destillation unterworfen, die rückständige ganz ätherfreie Flüssigkeit von dem ausgeschiedenen Chlorophyl getrennt, mit einigen Unzen Wassers verdünnt, und hierauf mit Bleioxydhydrat behandelt. Die abgeklärte Flüssigkeit wurde abgegossen, das rückständige, durch etwas Chlorophyl grün gefärbte Bleioxydhydrat mit reinem Wasser ausgewaschen, dieses der ersteren Flüssigkeit zugesetzt, und hierauf verdünstet. Die erhaltene Masse wurde nun von Neuem mit Äther ausgezogen, worin sie sich bis auf einen geringen Rückstand löste, und liefs nach Verdünstung des Äthers 2,5 Unzen eines schönen hellbraunen Digitalins zurück, welches alle von *Le Royer* angeführten Eigenschaften besafs, und drei Mal so viel als nach seiner Methode betrug.

Dafs man auf diesem Wege eine gröfsere Quantität des Digitalins erhalten müsse, geht schon aus theoretischen Gründen hervor; denn die extractiven, schleimigen und gummigen Bestandtheile der Digitalisblätter, welche darin innigst gemengt mit dem Digitalin vorkommen, verhindern zum Theil den Äther, dasselbe, oder vielmehr seine Verbindung mit der eigenthümlichen

Säure, die ich jedoch nicht untersucht habe, aufzulösen.

Da ich vermuthete, dafs dieser Stoff, eben so wie die anderen eigenthümlichen Pflanzenalkaloide, seine Farbe einem damit verbundenen extractiven Färbestoffe verdanke, so versuchte ich, ihn zu entfärben. Zu diesem Ende löste ich einen Theil desselben in Äther, und liefs die Lösung längere Zeit hindurch mit reiner Stickstoffkohle in der Wärme unter öfterem Umschütteln stehen. Obwohl das Quantum der Stickstoffkohle so grofs war, dafs man eine vier Mal so grofse Menge eines anderen eben so intensiv gefärbten Körpers hätte entfärben können, so fand doch gar keine Farbenzerstörung Statt, und ich überzeugte mich, dafs auf diesem Wege keine Entfärbung des Digitalins möglich sey. Ist nun diese braune Farbe diesem Stoffe, der sich durch sein Verhalten gegen Säuren als ein Alkaloid erweiset, wirklich eigenthümlich? Oder vermag die Stickstoffkohle, wenn ersteres nicht der Fall ist, den Färbestoff des Digitalins nicht zu zerstören oder zu binden, wie sie diefs bei anderen thut? Vertritt hier vielleicht eben dieser Färbestoff bei dem Digitalin die Stelle einer Säure? — Fragen, deren Beantwortung ich, aus Mangel an schicklicher Gelegenheit, meinen ferneren Forschungen über diesen Gegenstand vorbehalten mufs, oder Anderen überlasse.

V.
Fortschritte der Physik in der neuesten Zeit.

A. Electricität.

1. Über die Umstände, welche die Richtung und Stärke des electrischen Stromes in einem *Volta*'schen Elemente bestimmen. Von *La Rive.*

(Annal. de Chim. Tome 37, p. 225, e. s.)

La Rive hat am 20. August 1827 der helvetischen Gesellschaft der Naturwissenschaften ein Mémoire vorgelesen, das zum Zwecke hat, die Umstände anzugeben, welche die Richtung und Stärke des electrischen Stromes in einem *Volta*'schen Elemente bestimmen. Der Inhalt desselben steht mit den Arbeiten *Marianini's*, *Nobili's* und Anderer, die in dieser Zeitschrift bereits mitgetheilt worden sind, in so naher Berührung, daſs er schon deſshalb angeführt werden müſste, wenn es auch nicht die Absicht der Herausgeber wäre, alle litterarischen Producte des Auslandes den deutschen Lesern im Wesentlichen vorzulegen.

Nach einer Einleitung, worin von den Differenzen zwischen den Ansichten des Verfassers und denen anderer Physiker, vorzüglich *Marianinis*, die Rede ist, geht er zum eigentlichen Gegenstande seiner Abhandlung über, in dem wir ihm meistens wörtlich folgen wollen.

1. Umstände, welche die Richtung des electrischen Stromes bestimmen.

Nach *Volta's* Theorie, der auch *Marianini* beistimmt, wird die Richtung des electrischen Stromes in einem Plattenpaare, oder die Natur der jedem Elemente die-

ses Paares eigenen Electricität, einzig und allein durch die Berührung der zwei heterogenen Metalle bestimmt; der flüssige Zwischenkörper wirkt nur durch seine Leitungsfähigkeit, und hat daher auch nur Einfluſs auf die Intensität des Stromes. *H. Davy* nahm zwar *Volta's* Theorie zur Grundlage an, ging aber hierin weiter, hielt zum Entstehen eines electrischen Stromes eine chemische Wirkung für nothwendig, und gestattete ihr auch einen Einfluſs auf die Stärke dieses Stromes; aber die Natur der in jedem Metalle angehäuften Electricität hing nach seiner Meinung allein von der Berührung der zwei heterogenen Metalle, und von der Kraft ab, welche *Volta* die electromotorische nannte. Endlich nach *Fabroni*, *Wollaston* und anderen Gelehrten ist die chemische Wirkung der Flüssigkeit auf die Metalle die alleinige Ursache, welche die Erzeugung der Electricität bestimmt, und die Berührung ist nur das Mittel, wodurch diese Wirkung deutlich hervortritt. Man kann als Stütze dieser Theorie die unwidersprechliche Thatsache anführen, daſs die chemische Wirkung selbst Electricität erregt, und insbesondere, daſs ein starker electrischer Strom eintritt, wenn man in eine Flüssigkeit zwei Stücke desselben Metalls taucht, die von ihr angegriffen werden; eine Erscheinung, die weder nach *Volta's* noch nach *Davy's* Theorie erklärt werden kann.

Ich versuchte, ob es möglich sey, den electrischen Strom eines Plattenpaares durch verschiedene flüssige Leiter abzuändern. Eine einzige Thatsache, welche zeigt, daſs dasselbe Metall in Berührung mit einem anderen positiv- oder negativ-electrisch wird, je nachdem die dazwischen befindliche Flüssigkeit beschaffen ist, reicht hin, zu beweisen, daſs der electrische Zustand dieser zwei Elemente wenigstens nicht ausschlieſslich von der Berührung abhänge; aber um eine andere Theo-

rie zu begründen, braucht man eine groſse Anzahl von Thatsachen. Daher haben die folgenden Untersuchungen zum Zweck, zu zeigen: 1) daſs der electrische Zustand eines *Volta*'schen Plattenpaares nicht von der Berührung, ohne Rücksicht auf die Flüssigkeit, abhängt; 2) daſs dieser Zustand durch das Verhältniſs der beiden Metalle zur Flüssigkeit bestimmt wird; 3) daſs dieses Verhältniſs von der Art ist, daſs das Metall, welches von der Flüssigkeit am meisten angegriffen wird, gegen das andere negativ-electrisch erscheint.

In den folgenden Versuchen habe ich mich eines Galvanometers bedient, dessen Empfindlichkeit, ohne gerade sehr groſs zu seyn, dennoch hinreichte, die Wirkungen, um die es sich handelte, zu studiren, und ich erhielt in allen Fällen eine deutliche Ablenkung der Magnetnadel (fast immer zwischen 50° — 90°), so daſs mir weder über das Vorhandenseyn, noch über die Richtung des electrischen Stromes der geringste Zweifel übrig bleiben konnte. Endlich war jeder Versuch mehrere Male wiederholt, und zwar theils von mir selbst in Gegenwart einiger Freunde, theils von den Eleven der Academie ohne mein Beiseyn, und die Resultate stimmten immer vollkommen mit einander überein.

Beim ersten Versuche, der mir in den Sinn kam, wurde Ammoniak, das bekanntlich auf Kupfer stärker wirkt, als auf viele Metalle, welche von den andern Stoffen mehr angegriffen werden, zum flüssigen Leiter gewählt. Ich nahm ein Plattenpaar aus Kupfer und Zinn, welches, in eine salzige oder saure Lösung getaucht, einen starken, vom Kupfer zum Zinn gerichteten Strom erzeugte. Im Ammoniak gab es aber einen Strom, der vom Zinn zum Kupfer ging, so daſs das Kupfer positiv, das Zinn negativ war, während bei Anwendung saurer oder salziger Leiter das Gegentheil Statt hatte. Der Un-

terschied kommt nach meiner Meinung daher, daſs die saure oder salzige Lösung eine stärkere chemische Wirkung auf das Zinn ausübt, als auf das Kupfer, das Ammoniak aber umgekehrt das Kupfer mehr angreift als das Zinn. Hier wäre also das am stärksten angegriffene Metall gegen das andere positiv. Man kann die Wirkung nicht der Berührung der Metalle mit dem Alkali zuschreiben; denn Zink, welches in der Reihe der Electromotoren mehr positiv ist als Kupfer und Zinn, müſste gegen diese im Ammoniak negativ werden, wenn die Berührung mit einem Alkali die electromotorische Reihe der Körper sollte umkehren können; es ist aber dieses Metall mit beiden anderen positiv, weil auch die chemische Wirkung des Ammoniaks darauf stärker ist. Ferner, käme die Wirkung auf Rechnung der Berührung mit Alkalien, so müſste eine Kalilösung eine ähnliche Erscheinung hervorbringen, und doch ist Kupfer in einer solchen Lösung negativ, Zinn aber positiv, wie in einer sauren oder salzigen Flüssigkeit. Eisen mit Kupfer statt des Zinnes zu einem Paare verbunden, zeigte genau dieselben Phänomene, es war positiv in einer salzigen oder sauren Auflösung, hingegen negativ im Ammoniak. — — —

Die verschiedene Wirkung concentrirter und verdünnter Säuren auf einige Metalle lieferte mir mehrere merkwürdige Beispiele einer ähnlichen Umkehrung der Polarität. So ist in verdünnter Salpetersäure das Kupfer gegen Blei negativ, in concentrirter aber gegen dasselbe positiv; aber man weiſs auch, und es ist leicht sich zu überzeugen, daſs die chemische Wirkung der verdünnten Säure auf das Blei stärker ist, als auf das Eisen, und daſs das Gegentheil mit der concentrirten Statt findet. Eine Thatsache, welche sehr wohl beweist, daſs nur die stärkere chemische Wirkung ein Metall zum positiven

macht, besteht darin, dafs, wenn man Eisen und Blei in die concentrirte Säure taucht, das Eisen im ersten Augenblick negativ erscheint, weil noch keine chemische Wirkung Statt findet; wartet man aber, bis die chemische Wirkung beginnt, oder bringt man das eingetauchte Stück einen Augenblick in die Luft, so erlangt dasselbe Eisen einen sehr merklichen positiven Zustand. Ich hatte Gelegenheit, dieselbe Beobachtung am Kupfer zu machen, das in concentrirter Salpetersäure anfangs negativ ist, gegen Blei aber stark positiv wird, wenn die chemische Wirkung eingetreten ist. Ich baute auch eine Säule von Blei und Kupfer, deren Pole ich durch Eintauchen in concentrirte Salpetersäure umkehren konnte. Die Zersetzung des Wassers und der Salze, und alle magnetischen und electro-dynamischen Wirkungen traten in beiden Fällen ein, aber in entgegengesetztem Sinne. Demnach kann dieselbe Flüssigkeit nach Verhältnifs ihres Concentrationsgrades die Natur der an jedem Pole einer Säule angehäuften Electricität abändern; ein scheinbar sehr sonderbares Factum, das aber ganz in der Ordnung der Dinge zu liegen scheint, wenn man bedenkt, dafs der Concentrationsgrad auch die chemische Wirkung gänzlich abzuändern vermag.

Ich übergehe das Detail der Versuche, die ich mit concentrirter und verdünnter Schwefelsäure angestellt habe, und beschränke mich darauf, die Ordnung anzugeben, in welcher die Metalle, mit denen ich Versuche anstellte, in Hinsicht ihrer electromotorischen Kraft auf einander folgen, je nachdem man sich dieser Säure in einem oder dem anderen Zustande als flüssigen Leiter bedient. Jede der in den zwei Tafeln folgenden Substanzen ist positiv gegen jede vorausgehende, und negativ gegen jede folgende:

In concentrirter Salpetersäure.	In verdünnter Salpetersäure.
Oxydirtes Eisen,	Silber,
Silber,	Kupfer,
Quecksilber,	oxydirtes Eisen,
Blei,	Eisen,
Kupfer,	Blei,
Eisen,	Quecksilber,
Zink,	Zinn,
Zinn.	Zink.

Jedes einzelne Metall nimmt in jeder Tafel einen anderen Platz ein; welcher wäre denn nun der wahre nach der Theorie der Berührung? Es scheint mir dieser Umstand mit dieser Theorie unvereinbarlich zu seyn; er erklärt sich aber leicht, wenn man annimmt, daſs die Wirkung von der relativen Energie der chemischen Wirkung abhängt. Andere Metalle und einige andere Säuren, insbesondere sehr concentrirte und verdünnte Schwefelsäure, gaben Resultate, welche mit den mittelst Salpetersäure erhaltenen vollkommen analog waren, nämlich stets im Verhältniſs mit der Stärke der chemischen Wirkung standen. Im Vorbeigehen will ich bemerken, daſs bei keinem der Versuche, die mit derselben, aber verschieden concentrirten Säure vorgenommen wurden, der Einwurf gemacht werden kann, die Änderung der Polarität rühre von der Berührung der Flüssigkeit und des Metalles her, denn die Flüssigkeit ist in beiden Fällen dieselbe. Ohne mich mit der Beschreibung aller dieser verschiedenen Resultate aufzuhalten, die ich noch zu vervielfältigen gedenke, um mich fest zu überzeugen, daſs sich ohne Ausnahme das Factum bewähre, es hänge die Richtung des electrischen Stromes von der chemischen Wirkung ab, will ich nur noch drei den vorigen analoge Facta anführen, die mir in Betreff der angewen-

deten Substanzen und der dabei obwaltenden Umstände sehr geeignet scheinen, den Einfluſs der chemischen Wirkung zu zeigen.

Die Kohle ist gegen Platin in kalter oder bis 100° — 150° erwärmter concentrirter Schwefelsäure stark positiv, und ich fand sie noch stärker negativ gegen dasselbe Metall im wenig erwärmten Königswasser; aber im ersten Falle wurde die Kohle, im zweiten das Platin stark angegriffen. Beide Versuche wurden oft mit demselben Stücke Kohle und Platin wiederholt; man muſs nur dafür sorgen, daſs zur Erlangung eines ziemlich starken Stromes dieses Metall in beiden Säuren eine groſse Oberfläche erhalte; ich bediente mich eines Platintiegels, goſs die Flüssigkeit darein, und tauchte in diese die Kohle. Arsenik und Eisen geben ein anderes Beispiel einer Umkehrung der Pole. In einer verdünnten Säure ist das Eisen sehr stark positiv gegen Arsenik, und dieses wird auch sehr wenig angegriffen; taucht man sie aber in durch starkes Lampenfeuer geschmolzene Pottasche, so wechseln sie ihre Rolle, das Arsenik wird stark vom Kali angegriffen, und erscheint positiv, das Eisen hingegen, worauf fast keine Wirkung erfolgt, negativ. Gold und Eisen geben ein Plattenpaar, wovon das erstere gewöhnlich negativ ist. Quecksilber, als leitende Flüssigkeit gebraucht, konnte die Richtung des electrischen Stromes nicht umkehren, und durch seine Wirkung auf das Gold dieses Metall gegen Eisen, auf das es nicht wirkt, positiv machen. Ist aber die Bildung eines Amalgams eine wahre chemische Wirkung, und kann man Quecksilber als flüssigen Leiter brauchen? Diese Zweifel sollten gehoben werden; ein deſshalb angestellter Versuch gab kein entscheidendes Resultat; als man aber das Gold leicht vor dem Eintauchen in Quecksilber mit Salpetersäure befeuchtete, erhielt man einen

sehr starken Strom, bei welchem das Gold positiv, das Eisen negativ war. Hat wohl hier die Salpetersäure die Bildung des Amalgams durch eine directe Wirkung auf das Quecksilber erleichtert? Daran liegt wenig; in allen Fällen war Gold positiv gegen Eisen, und dieses ist das Entgegengesetzte dessen, was mit einer salzigen oder sauren Lösung erfolgt.

Aus allem Bisherigen scheint mir zu folgen, daſs die Richtung des electrischen Stromes nicht allein von der Natur der zwei Metalle, sondern vom Verhältnisse dieser zur Flüssigkeit abhänge. Das ist Thatsache, ich gehe aber weiter, und stelle eine sehr wahrscheinliche Hypothese auf. Wenn ich sage, das Verhältniſs der Flüssigkeit zu den Metallen sey von der Art, daſs das mehr angegriffene positiv, das andere negativ sey, so ist dieses bloſs eine Hypothese; denn wornach können wir denn genau über die Stärke einer chemischen Wirkung urtheilen? Ist jene die stärkste, bei welcher das stärkste Aufbrausen und die gröſste Wärmeentwicklung Statt findet, und steht diese Stärke mit der Affinität im Verhältnisse? Ich glaube, man hätte Unrecht, dem ersten dieser Criterien zu trauen, und daſs man auch durch das zweite oft getäuscht würde; denn dieselbe Säure wirkt nach Verhältniſs ihrer Concentration bald auf dieses, bald jenes Metall stärker. Wie es immer seyn mag, ich werde in der Folge ein von jeder Hypothese unabhängiges Verhältniſs angeben, das zwischen der Flüssigkeit und den Metallen eines Plattenpaares in Betreff der Natur ihrer Electricität stets Statt findet. Gibt man zu, daſs ein electrischer Strom eintritt, so oft es eine Differenz in der von der Flüssigkeit auf die beiden Metalle ausgeübten Wirkung gibt, so erklärt man sehr wohl die Electricitätsentwickelung bei allen chemischen Wirkungen, besonders das Entstehen eines Stroms mit

zwei Platten desselben Metalls; denn stets wird, entweder wegen der gröſseren Oberfläche, oder wegen späterem Eintauchen, oder wegen anderen zufälligen Umständen eine der zwei Platten mehr angegriffen werden als die andere. Es frägt sich aber hier, kann man durch Vergröſserung der Oberfläche des am wenigsten angegriffenen Metalls die stärkere Wirkung der Flüssigkeit auf das andere Metall ersetzen, oder sie gar übertreffen machen? Ich habe bemerkt, daſs dieses angeht, wenn die Differenz vermöge der Natur der Flüssigkeit oder der Metalle sehr gering ist, daſs aber in allen anderen Fällen, die bei weitem die zahlreicheren sind, die Summe einer groſsen Anzahl sehr schwacher chemischer Kräfte nie einer sehr starken Kraft gleich werden, oder sie gar übertreffen kann, wenn diese auch auf eine möglichst kleine Ausdehnung wirkt. So bleibt Kupfer, es mag auch eine gegen Zink sehr groſse Oberfläche haben, in einer verdünnten Säure oder einer Salzauflösung stets negativ.

Eine andere Folge der Grundsätze, die ich eben angeführt habe, besteht darin, daſs von den zwei Metallen eines Paares, deren jedes in eine verschiedene Flüssigkeit getaucht wird, welche aber mittelst eines feuchten Leiters mit einander communiciren, stets dasjenige als positiv gefunden wird, welches von der Flüssigkeit, in der es sich befindet, am meisten angegriffen ist. Die einfachste Art, sich davon zu überzeugen, besteht darin, eine umgekehrte heberförmig gekrümmte Röhre anzuwenden, in einen Schenkel concentrirte, in den anderen verdünnte Schwefelsäure zu gieſsen. Diese zwei Flüssigkeiten berühren einander, ohne sich zu vermischen, weil sie verschieden specifisch schwer sind. Taucht man zwei Theile desselben Metalls, oder zwei verschiedene Metalle in jede dieser Flüssigkeit, so fin-

det man im Allgemeinen das in der verdünnten Säure befindliche positiv; doch gibt es Ausnahmen, und da man es mit zwei sehr verschiedenen chemischen Wirkungen zu thun hat, so ist es schwer, vorhinein anzugeben, welche derselben die stärkere seyn wird. Man kann diese Versuche verschieden abändern, und dieselbe Säure von verschiedener Stärke, oder zwei verschiedene Flüssigkeiten anwenden. Ich habe eine Menge solcher Versuche angestellt, und alle schienen mir den vorigen Grundsatz zu bestätigen. Aus dem Vorhergehenden erklärt man auch das von *Becquerel* erhaltene Resultat, der eine von zwei zu einem Paare verbundene Kupferplatten in starkes, die andere in schwaches Salzwasser eintauchte, und die letztere positiv, die erstere negativ fand, und daraus den sonderbaren Schluſs zog, Salzwasser mache durch Berührung das Kupfer negativ-electrisch. Diese Wirkung kommt daher, daſs eine Seesalzlösung das Kupfer im verdünnten Zustande stärker angreift, als im concentrirten, wie es *H. Davy* bewiesen hat. Auch mehrere von *Marianini* beschriebene Phänomene lassen sich aus demselben Satze erklären. Die Wirkung der Oxydation, wodurch ein Metall gegen dasselbe nicht oxydirte negativ wird, flieſst aus derselben Quelle. Der merkwürdige Einfluſs der Wärme kommt gröſstentheils eben daher, und nicht bloſs von einer Erhöhung der Leitungsfähigkeit der Flüssigkeit, wie *Marianini* glaubt; daſs die Verstärkung des Stromes durch Erwärmung der Platten von einer Steigerung der chemischen Wirkung auf das Metall herrührt, ist um so wahrscheinlicher, da dieser Strom nur wenig durch eine Temperaturerhöhung verstärkt wird, wenn die Flüssigkeit schon im kalten Zustande eine starke chemische Wirkung ausübet, während er eine groſse Verstärkung erfährt, wenn diese Wirkung der Flüssigkeit nur gering ist, was auch *Ma-*

rianini bemerkt hat. Nichts desto weniger ist es richtig, daſs unter gewissen Umständen die Leitungsfähigkeit der Flüssigkeiten durch Wärme erhöht wird; zu diesem Resultate gelangten schon vor Langem *Gay-Lussac* und *Thenard*, da sie in derselben Zeit und unter gleichen Umständen an den Polen einer Säule viel mehr Gas erhielten, wenn die Flüssigkeit, in welche die Drähte reichten, warm war. Ich habe oft bei verschiedenen Flüssigkeiten dieselbe Beobachtung gemacht, doch schien mir diese Wirkung der Wärme bedeutender, wenn die leitende Flüssigkeit in einer weniger als einen Zoll weiten Röhre enthalten war, als wenn sie sich in einem gröſseren Gefäſse befand, und dieses macht mich glauben, daſs bei *Marianini's* Versuchen fast die ganze Wirkung von der gröſseren chemischen Action herrühre. Was das Factum betrifft, daſs dieselbe Flüssigkeit mehr leitet, wenn sie dieselbe Temperatur beim Abkühlen erreicht, als wenn sie beim Erwärmen dahin gelangt, könnte man sie wohl vielleicht von einer geringen Zinkoxydschichte herleiten, welche die Flüssigkeit mit Hülfe der Wärme auflösen konnte, und wodurch ihre Leitungsfähigkeit gesteigert wurde? — — — — —

Eine andere Folge dieses Satzes ist, es sey nicht unmöglich, daſs die thermo-electrischen Ströme von derselben Ursache herrühren, wie die Ströme, wobei ein feuchter Leiter im Spiele ist. Die Wärme hat Einfluſs auf den Grad der chemischen Wirkung, welche das Oxygen der Luft auf die Metalle ausübt, und wir sehen fast immer, daſs das wärmere Metall gegen das andere positiv ist *); selbst die Anomalien, welche die Bildung dieser Ströme begleiten, sind mehr geeignet,

---

*) Man vergleiche hiermit die Arbeit *Nobili's* S. 350 dieses Bandes. *B.*

diesen Satz zu bestätigen als umzustofsen. Das Eisen, z. B. welches bis zur Rothglühhitze gegen Kupfer positiv ist, und bei der Hellrothglühhitze gegen dasselbe negativ wird, gibt einen Beweis dafür; denn man weifs, dafs die Affinität dieses Metalls zum Sauerstoffe einen ähnlichen Gang nimmt. Mir scheint, man kann auf dieselbe Weise durch Wirkung des Oxygens und der in der Luft befindlichen Dünste die immer sehr schwache Spannung bei zwei heterogenen, ohne feuchten Leiter sich berührenden Metallen erklären, wenn man bedenkt, dafs stets eines dieser Metalle oxydirbarer ist als das andere.

Ich will nun nur noch einiges sagen, wie ich mir den Einflufs der chemischen Wirkung auf die Richtung des electrischen Stromes vorstelle. Wenn ein Metall durch einen tropfbaren oder gasförmigen Stoff angegriffen wird, so erlangt die angegriffene Oberfläche positive Electricität, und diese verbreitet sich im Gas oder in der umgebenden Flüssigkeit. Das negative von dieser Oberfläche vertriebene Fluidum sucht aus dem Metalle durch alle guten Leiter zu entkommen, die daran gelöthet sind, und sowohl mit ihrer Oberfläche als mit ihrem Inneren communiciren. Die Intensität der zwei entwickelten Principe hängt von der Stärke der chemischen Wirkung ab. Taucht man nun zwei feste Körper in dieselbe Flüssigkeit, so wird jeder in diesen Zustand versetzt, und wenn man mit einem metallenen Leiter (der hier nicht Erreger ist) die hervorragenden Enden der Platten verbindet, so gestattet man dem negativen und positiven Fluidum jeder Platte sich zu vereinigen, und sich zu neutralisiren. So ist jede Platte die Quelle eines Stromes und die Leiterin des Stromes einer anderen, und der bestehende Strom ist durch die Differenz der Energie beider entgegengesetzter Ströme gebildet. Ist

die chemische Wirkung auf beide Metallflächen gleich grofs, so heben sich beide Ströme einander auf; wird keines der Metalle afficirt, so gibt es gar keinen Strom etc. etc.

Diese Art, die Electricitätsentwicklung zu erklären, scheint mir alle von verschiedenen Physikern erhaltenen Resultate zu erklären, besonders die auf die Natur der durch Berührung der Metalle und Flüssigkeiten entwickelten Electricität Bezug habenden, worüber *Becquerel* viele Thatsachen kennen gelehrt hat. Ich will mich mit diesen allein abgeben, weil sie mit meinem Satze im Widerspruche zu stehen scheinen, während sie ihn doch bestätigen. *Becquerel* stellte ein mit einer Flüssigkeit gefülltes metallenes Gefäfs auf einen Condensator, tauchte in die Flüssigkeit ein anderes Metall, welches er am anderen Ende hielt, und fand, dafs der Condensator bald positive, bald negative Electricität zeigte. Beim genauen Erwägen dieser Resultate schienen sie immer daher zu kommen, dafs die Flüssigkeit bald auf das eingetauchte Metall, bald auf das Gefäfs stärker wirkte. — — — —

Nach dieser Theorie hängt die Electricitätserzeugung in einem *Volta*'schen Elemente nicht von einem dem Körper eigenen electrischen Principe und von dessen Natur ab, sondern von der Differenz der Action, welche das chemisch wirkende auf der Oberfläche des festen Körpers ausübt; diese trennt die zwei electrischen Fluida von einander, wie die Reibung und der Druck, und jede mechanische Behandlung, wodurch Electricität in Umlauf gesetzt wird. Verhält sich dieses so, und bewirkt die Berührung keine Electricitätsentwicklung, so kann man behaupten, dafs diese Entwicklung nie ohne eine chemische Action vor sich gehe. Kann man nun die electro-chemische Theorie, nach welcher die Affinitäten der Körper zu einander das Resultat ihres verschiedenen

electrischen Zustandes sind, mit dem Vorhergehenden, besonders mit den Thatsachen vereinbaren, daſs ein Körper bald positiv, bald negativ gegen einen anderen ist? Ich füge zu den schon angeführten Fällen dieser Änderung noch ein Beispiel, das mir *Nobili* mittheilte, und das beweiset, daſs der Zustand der Festigkeit des oberflächlich angegriffenen Körpers die Intensität der entwickelten Electricität erhöht. Dieses Beispiel besteht darin, daſs Kalk im festen Zustande, in Salpetersäure getaucht, einen Strom erregt, in welchem er stark positiv erscheint, während er in Wasser aufgelöset mit derselben Säure nur einen sehr schwachen Strom erzeugt, dessen Richtung der des vorigen oft entgegengesetzt ist. Die electro-chemische Theorie scheint mir vorzüglich auf zwei Thatsachen zu beruhen: erstlich, daſs die Körper eine eigene Electricität besitzen, die durch Berührung aufgeregt wird, die Unrichtigkeit dieser habe ich bereits gezeigt; zweitens, daſs in einer mittelst der *Volta*'schen Säule bewirkten Zersetzung der eine Bestandtheil zum positiven, der andere zum negativen Pole übergeht. Aber ich habe in einem anderen Mémoire gezeigt, daſs die Zersetzung nicht durch die electrische Spannung und die sie begleitende Anziehung erzeugt wird, indem diese Zersetzung desto schneller vor sich geht, je besser die Flüssigkeit leitet, und je geringer daher die Spannung ist. Darum scheinen mir diese zwei Voraussetzungen nicht zuläſsig zu seyn, und die electro-chemische Theorie nicht auf fester Basis zu ruhen. Ich bin weit entfernt, zu läugnen, daſs bei der Verbindung zweier Körper, mithin bei einer chemischen Action, Electricität frei wird, denn ich gehe ja von diesem Grundsatze aus. Es ist aber wohl möglich und sehr wahrscheinlich, daſs von dieser Electricität die Wärme und das Licht herrührt, welche die chemische Wirkung be-

30 *

gleiten; daſs aber die Kraft, wodurch die chemische Wirkung erregt wird, die den Körpern eigene Electricität, und demnach die Affinität das Resultat der gegenseitigen Anziehung der zwei electrischen Principe sey, ist mir weder wahrscheinlich, noch mit den erwähnten Erfahrungen vereinbarlich.

2. Umstände, welche die Stärke des electrischen Stromes bestimmen.

Die Umstände, welche auf die Stärke des electrischen Stromes Einfluſs haben, lassen sich auf folgende drei zurückführen: 1) Auf die Differenz in der Stärke der chemischen Wirkung, welche die Flüssigkeit auf jedes Element eines Plattenpaares ausübt. Je gröſser diese Differenz ist, desto intensiver ist der Strom. 2) Auf den Grad der Leichtigkeit, womit der electrische Strom von einem festen Elemente des Plattenpaares in die dazwischen befindliche Flüssigkeit übergeht. Ich habe schon früher gezeigt, daſs die Electricität beim Übergang von einem Leiter in einen anderen stets einen Verlust erleidet, und werde zeigen, daſs die Gröſse dieses Verlustes von der Natur des festen und flüssigen Leiters abhängt. 3) Von der gröſseren oder kleineren Leichtigkeit, womit die Electricität von einem Theilchen der Flüssigkeit in das andere übergeht, d. h. von der Leitungsfähigkeit der Flüssigkeit. Man könnte vom theoretischen Gesichtspuncte aus auch noch die den Metallen eigene Leitungsfähigkeit berücksichtigen, aber in der Erfahrung zeigt sich der Einfluſs dieser gegen die drei vorhergehenden Einflüsse unmerklich. Es kann also die Stärke des electrischen Stromes als Function von drei, oder theoretisch genommen von vier veränderlichen Gröſsen angesehen werden, deren Form bestimmt werden soll; oder mit anderen Worten: die Auflösung der

Frage besteht darin, die allgemeinen Gesetze (wenn es welche gibt), unter denen die Ursachen der Änderung der Intensität stehen, und die beständigen Coefficienten für jeden besonderen Fall, wo möglich, zu bestimmen. Darum muſs man jeden dieser Umstände isolirt untersuchen, und dann auf die aus ihrer vereinten Wirkung resultirende Stärke des Stromes schlieſsen.

Zuerst hängt die Stärke des Stromes von der Differenz der chemischen Wirkung ab. Diese Differenz kann von der Heterogeneität der festen Bestandtheile eines Paares, oder wenn diese homogen sind, davon abhängen, daſs die angegriffene Oberfläche des einen kleiner, oder diese weniger oxydirt oder aus einem anderen Grunde besser angegriffen ist, als die andere. Bei heterogenen Körpern ist der Strom desto stärker, je verschiedener die zwei festen Elemente in Beziehung auf die chemische Wirkung der Flüssigkeit sind. Daher gibt Eisen, das in verdünnter Schwefelsäure weniger angegriffen wird als Zink, und mehr als Kupfer, mit jedem dieser Metalle bei Anwendung dieser Säure einen schwächeren Strom, als Kupfer und Zinn mit einander. Es gibt zwar mehrere scheinbare Ansnahmen von diesem Gesetze, sie erklären sich aber vollkommen, wenn man zugleich die anderen Ursachen, die den Strom bestimmen, berücksichtiget. Z. B. Platin gibt mit Zink einen schwächeren Strom als Kupfer, und doch ist der Unterschied zwischen der chemischen Wirkung auf Zink und auf Platin gröſser, als zwischen der auf Zink und Kupfer; die Folge wird aber zeigen, daſs der Electricitätsverlust beim Übergang vom Platin in das Fluidum grösser ist, als beim Übergang vom Kupfer in dasselbe. Ich muſs hier vorläufig zum Beweise der Richtigkeit dieser Erklärung sagen, daſs die Leichtigkeit, womit der electrische Strom von einem Metall in die Flüssigkeit über-

geht, nicht bloſs von der Natur dieser zwei Körper, sondern auch von der mit der Flüssigkeit in Berührung stehenden Fläche abhängt. Man kann daher diese Fläche beim Platin gröſser machen, als beim Kupfer, so daſs der Strom im ersten nicht mehr verliert, als im zweiten. Das Verhältniſs dieser Flächen bei Platin und Kupfer ist demnach so, daſs die Änderung des Leiters in beiden eine gleiche Wirkung erzeugt *).

Macht man aber mit zwei vollkommen gleichen Zinkflächen zwei Plattenpaare, bei deren einem das Platin, beim anderen das Kupfer negativ seyn soll, und gibt ihren Oberflächen das genannte Verhältniſs, so findet man, wie ich mich oft überzeugt habe, daſs das Paar mit Platin einen stärkeren Strom gibt, als das mit Kupfer, denn da wirkt immer mehr der Unterschied der chemischen Action, um deren Einfluſs es sich handelt. Auf solche Weise erklärt man auch die Anomalien, die *Marianini* bemerkte, als er die Stärke des Stromes in Plattenpaaren aus verschiedenen Metallen untersuchte. Man würde auf dieselben scheinbaren Unregelmäſsigkeiten stoſsen, wenn man verschiedene Flüssigkeiten zu Leitern wählte; denn die Flüssigkeit, deren Wirkungsunterschied auf die Metalle gröſser ist, als der einer anderen, kann doch einen schwächeren Strom erzeugen, wenn sie der Electricität beim Übergange in sie ein gröſseres Hinderniſs in den Weg stellt. Man kann es daher als Grundsatz gelten lassen, daſs bei übrigens gleichen Umständen die Stärke des electrischen Stromes von

*) Da dieses Verhältniſs für Electricität von verschiedener Stärke verschieden ist, so muſs man es für den Fall, um den es sich handelt, mit einem Strom bestimmen, der nahe eben so stark ist, wie derjenige, den man mit dem gleich darauf anzuwendenden Plattenpaare erhält.

der Differenz der chemischen Wirkung der Flüssigkeit abhänge.

So oft der electrische Strom von einem festen Leiter in einen flüssigen übergeht oder umgekehrt, verliert er einen Theil seiner Stärke, und dieser Theil ist von der gröfseren oder kleineren Leitungsfähigkeit der zwei Substanzen ganz unabhängig. Dieses habe ich in einem frühern Mémoire bewiesen, indem ich in der Flüssigkeit metallene Querstücke anbrachte, durch welche die Electricität gehen mufste. Ein Galvanometer zeigte unter diesen Umständen stets eine Verminderung des electrischen Stromes an, die nach Umständen gröfser oder kleiner war *). Da der Weg, den die Electricität bei einem Plattenpaare nehmen mufs, immer durch verschiedene Leiter führt, so mufs dieser Einflufs immer Statt finden. Um ihn näher kennen zu lernen, wollen wir das Phänomen selbst von verschiedenen Seiten betrachten, und zuerst die allgemeinen Gesetze aufsuchen, nach denen er sich richtet, und die unabhängig sind von der Natur der festen und flüssigen Leiter, und hierauf das näher betrachten, was von der Natur dieser Leiter abhängt.

Ich habe in meinem früheren Mémoire zwei Gesetze aufgestellt. Nach dem ersten ist der Verlust der Electricität, wenn diese einige Male von einem festen Leiter in einen flüssigen übergeht, desto kleiner, je gröfser ihre Intensität ist, und demnach nicht immer derselbe aliquote Theil der ursprünglichen Stärke des Stromes; nach dem zweiten verliert von zwei gleich starken Strömen derjenige, welcher am öftesten das Mittel gewechselt hat, durch einen neuen Wechsel weniger als der andere. Nach diesem war es mir leicht, einige Folge-

---

*) *Annals de Chim. et de Phys. Tome* 28, *p.* 208.

rungen, die Wirkungen einer Säule mit grofsen oder vielen Platten betreffend, abzuleiten, die ich auch durch directe Versuche bekräftigte.

Fast gleichzeitig kam *Marianini* auf einem ganz anderen Wege zu ähnlichen Resultaten; insbesondere hat er den Grundsatz aufgestellt, dafs die theilweise Schwächung beim Übergange von einem Plattenpaare zum anderen desto geringer ist, je öfter der Strom schon von einem Paare in die Flüssigkeit übergegangen ist; doch scheint es mir nicht, als hätte er angegeben, es folge aus seinen Versuchen, die Verminderung der Electricität bei einem Wechsel des Mittels sey desto geringer, je intensiver diese aus was immer für einer Ursache selbst ist. *Marianini* setzt ohne Beweis voraus, ein unvollkommener Leiter wirke wie ein System abwechselnd auf einander folgender mehr oder weniger leitender Substanzen, und erklärt daraus die physischen und physiologischen Wirkungen der Säulen mit vielen Platten. Auch mufs ich bemerken, dafs die allgemeinen Folgerungen, zu denen *Marianini* gelangt, aus Versuchen gezogen wurden, die so sehr im Kleinen angestellt wurden, dafs man an ihrer Genauigkeit zweifeln könnte, wenn man sie nicht auch bei gröfseren wahrgenommen hätte; auch weifs ich nicht, ob der Ablenkungswinkel einer Magnetnadel in demselben Verhältnisse gröfser wird, in welchem die Intensität der Ströme wächst. Man darf nicht übersehen, dafs die Formel, die nach *Marianini* die Wirkung einer *Volta*'schen Säule ausdrückt, nur für einen sehr schwachen Strom richtig ist, nämlich da, wenn es sich um Fälle handelt, auf welche die Formel sich stützt, dafs sie aber für energisch wirkende Apparate immer weit von der Wahrheit abweicht, welches, wie ich glaube, daher kommt, dafs *Marianini* als Grundsatz die Proportionalität zwischen starken und schwachen Wir-

kungen der Electricität angenommen hat. Die oben angeführten zwei Gesetze beziehen sich nur auf die Beschaffenheit der Electricität, und auf die Zahl der Abwechslungen. Ich wollte aber auch den Einfluſs der Ausdehnung der Oberfläche der Platten, welche die Flüssigkeit berührt, bestimmen. Man weiſs schon aus *Gay-Lussac's* und *Thenard's* Arbeiten, daſs der Strom desto stärker wirkt, je gröſser diese Berührungsfläche ist; ich wollte aber ausmitteln, nach welchem Gesetze die Stärke des Stromes mit der Einsenkungsfläche zunimmt. Zu diesem Ende tauchte ich in ein mit einem flüssigen Leiter gefülltes Gefäſs zwei Platinplatten mit einem Quadratzoll Oberfläche, deren eine von der anderen 4 L. abstand; ich will diesen Apparat ein einfaches System nennen. In zwei andere ganz gleiche Gefäſse, welche dieselbe Flüssigkeit enthielten, tauchte ich auch zwei Platinplatten in derselben Entfernung von einander, die aber nur mit einer Fläche von $^1/_2$ Quadratzoll mit der Flüssigkeit in Berührung standen; ich brachte zwei und zwei der Platten, die in verschiedenen Gefäſsen standen, in metallinische Berührung. Diesen Apparat will ich ein Doppelsystem nennen, und ein Tripelsystem jenen, wo sechs nur auf $^1/_3$ Z. eingetauchte Platten zu zwei und zwei in drei verschiedenen Gefäſsen eben so verbunden wurden. In allen diesen Systemen war die Totalsumme der mit der Flüssigkeit in Berührung stehenden Oberflächen dieselbe; auch die Entfernung der gegenüberstehenden Platten war allenthalben gleich groſs, nämlich gleich 4 L.; der einzige Unterschied bestand, wenn man die verschiedenen Systeme einzeln in den *Volta*'schen Kreis brachte, darin, daſs der Strom im ersten von einer Platte zur anderen ging, im zweiten sich zwischen zwei mit einander leitend verbundene und mit einem Pol communicirende Platten theilte, oder in die

zwei anderen entgegengesetzten, eben so verbundenen und mit dem anderen Pol communicirenden überging, endlich daſs er sich im dritten unter drei Platten vertheilte, die auch metallinisch sich berührten, um in die drei entgegengesetzten überzugehen. Ist die Stärke des Stromes der Gröſse der Berührungsfläche der Flüssigkeit direct proportionirt, so müssen diese drei Systeme gleich gut leiten; denn dann leitet die Summe der zwei gleichen Theile des Doppelsystems wie das einfache System allein, und die Leitungsfähigkeit jedes ist immer die Hälfte von der des einfachen Systems. Eben so, wenn die Summe der drei gleichen Theile des Tripelsystems wie das einfache leitet, so heiſst es, daſs die Leitungsfähigkeit jedes ein Drittel von der des einfachen ist, und da die Oberfläche jedes Theils des Systems ein Drittel von der des einfachen beträgt, so finden wir auch hier obige Proportionalität. So ist es aber nicht. Mehrere Versuche, die ich mit verschiedenen Flüssigkeiten, wie z. B. mit verdünnter und concentrirter Salpetersäure, und mit Strömen von verschiedener Stärke anstellte, haben gezeigt, daſs bald dieses, bald jenes System am besten leite, und daſs dieser Unterschied der Leitungsfähigkeit von einem einzigen Umstande, nämlich von der Stärke des Stromes abhänge. So war für einen schwachen Strom das einfache System ein besserer Leiter, als das Doppel- und Tripelsystem, für einen stärkeren Strom übertraff das Tripelsystem das einfache, endlich für einen noch stärkeren hatte das einfache System die geringste Leitungsfähigkeit. Wie es sich immer verhalten mag, so kann man doch allgemein behaupten, daſs ein einfaches System einen schwachen Strom, ein mehrfaches aber einen bedeutenden besser leitet. Es gibt einen Strom von bestimmter Stärke, für welchen beide Systeme gleich gute Leiter sind; für einen stärkeren ist

es das mehrfache, für einen schwächeren das einfache, das beim Wechsel des Mittels die geringste Schwächung desselben bewirkt.

Es ist Schade, daſs man für Electricität nicht ein ähnliches Instrument hat, wie das Thermometer für die Wärme, nämlich ein Vergleichungsinstrument. Wir fühlen hier schon die Nothwendigkeit, den Grad der Stärke der Electricität anzuzeigen; wir können sie aber nicht anders anzeigen, als z. B. durch die Anzahl der Plattenpaare, die zur Erzeugung dieses Effectes nöthig sind; aber die Kraft eines solchen Apparates hängt von so vielen Umständen ab, daſs eine solche Anzeige unzulänglich seyn muſs. Ich kann daher für jetzt, wie bisher, die Sache nur allgemein bezeichnen; nur will ich bemerken, daſs eine Säule von zehn Plattenpaaren mit 40 Theilen Wasser, 1 Theil Schwefelsäure und 1 Theil Salpetersäure, Electricität von allen zur Erzeugung der erwähnten Phänomene nöthigen Graden liefert, wenn man ein, zwei, drei u. s. w. Paare derselben braucht. Ich erhielt sie auch mit einer schwachen Säule von vierzig Plattenpaaren; bei Anwendung von zwanzig derselben hatten alle drei Systeme gleiche Leitungsfähigkeit, bei zehn oder vierzig war diese für das eine oder das andere gröſser. Endlich, um noch ein Beispiel anzuführen, leitete bei Anwendung concentrirter Salzsäure das einfache System besser als das Tripelsystem, wenn der Strom nach seinem Durchgange durch das erste die Nadel des Galvanometers um 60° ablenkte, während bei einer Ablenkung von 65° unter denselben Umständen alle gleich gut leiteten, und wenn der Ablenkungswinkel 70° oder gar 75°—85° betrug, leitete das Tripelsystem besser als das einfache, und die Ablenkung betrug 10° zu Gunsten des erstern. Welchem Electricitätsgrade die Anzeigen meines Galvanometers entsprechen, konnte

ich vor der Vergleichung der Intensitäten der Ströme nicht angeben. Um die relative Leitungsfähigkeit der zwei Systeme zu bestimmen, brauchte ich eine Säule, deren Wirkung während der Dauer des Versuches als constant angesehen werden konnte, und ich brachte abwechselnd eines oder das andere System in die Kette, verglich in beiden Fällen die Ablenkung der Magnetnadel des Galvanometers, und konnte so leicht beurtheilen, in welchem Falle der Strom am wenigsten verloren hatte. Ich habe mich aber auch oft des doppelten Galvanometers bedient, wie ihn *Becquerel* *) zur Vergleichung der Leitungsfähigkeit der Metalldrähte brauchte. Man ist beim Gebrauche dieses Instrumentes von den Änderungen der Säule ganz unabhängig, weil die zwei Körper oder Körpersysteme, deren Leitungsfähigkeit verglichen werden soll, zugleich im Kreise sich befinden. So lange beide gleich gut leiten, ruht die Nadel, sobald einerseits der Strom stärker ist als andererseits, erfolgt eine Bewegung derselben, und die Richtung derselben zeigt, wo der stärkere sich befindet. Es ist begreiflich, daſs dieser Apparat die kleinsten Unterschiede der Leitungsfähigkeit anzeigt; man muſs sich aber vor dem Gebrauche dieses Instrumentes sorgfältig versichern, daſs im Falle zweier ganz gleicher Leitungen kein Strom von was immer für einer Stärke eine Bewegung an der Magnetnadel erzeugt. Beide Methoden haben mich genau zu demselben Ziele geführt, die letztere gab aber präcisere und mehr constante Resultate. Diese scheinen auf den ersten Blick etwas bizarr, doch halte ich sie für erklärbar, wenn man sie genau überlegt. Sie scheinen anzuzeigen, daſs für einen schwachen Strom die Zunahme der Intensität bei der Vergröſserung der Oberfläche schneller

*) *Annal. de Chim. et de Phys. Tome* 32, *p.* 420. Diese Zeitschrift, Bd. III. S. 106.

wächst, als diese Vergrößerung, und daſs für einen starken Strom das Gegentheil Statt findet; denn wir sehen, daſs die ganze Oberfläche im ersten Falle eine mehr als doppelte Leitungsfähigkeit besitzt, im zweiten Falle aber eine geringere. Aber die Einwirkung der Oberfläche auf die Erleichterung des Durchganges der Electricität muſs bei einem schwachen Strom kräftiger als bei einem starken seyn, weil schwache Electricität nach dem ersten Gesetze eine im Verhältniſs zu ihrer Stärke gröſsere Schwierigkeit findet, das Mittel zu wechseln. Alle diese Thatsachen finden in der Bemerkung *Wollaston's* eine Bestätigung, nach welcher in einer Säule die Stärke des Stromes durch Vergröſserung der Kupferfläche gesteigert wird. *Marianini* hat gefunden, daſs diese Steigerung nur Statt findet, bis die Kupferfläche die des Zinkes sieben oder acht Mal übertrifft. Da wird durch Vergröſserung der Kupferfläche das ersetzt, was durch die Schwierigkeit des Übergangs vom Kupfer in die Flüssigkeit entgeht. Bei einem starken Strom muſs aber der Einfluſs der Vergröſserung der Oberfläche viel geringer seyn, wovon ich mich auch überzeugte. Ich lieſs zu diesem Ende zwei sehr groſse *Volta*'sche Elemente bereiten, an einem hatte das Zink nur die Hälfte, am anderen nur $^1/_4$ der Fläche des Kupfers, die Fläche dieses war aber in beiden gleich groſs. Diese beiden Apparate gaben, in dieselbe Flüssigkeit getaucht, keine merklich verschiedene Wirkung, wie der Strom schwach war; so wie man aber eine stärkere Flüssigkeit brauchte, und der Strom stärker wurde, gab die Säule, bei welcher die Zinkfläche gröſser war, stärkere Wirkung. Dieses kommt offenbar davon her, daſs im Falle einer grossen Intensität die Erleichterung des Übergangs durch Vergröſserung der Fläche verhältniſsmäſsig kleiner ist. Aus allem Vorausgehenden folgt daher: 1) Daſs die Ver-

größerung der Oberfläche den Übergang des Stromes erleichtert; 2) daſs die daraus hervorgehende Steigerung des Stromes in einem gröſseren Verhältnisse wächst, als die Oberfläche selbst, wenn der Strom schwach ist; 3) daſs das Gegentheil eintritt, wenn der Strom stark ist; 4) daſs es ohne Galvanometer unmöglich ist, anzugeben, wie groſs die Stärke der Electricität ist, bei welcher dieses Verhältniſs anfängt, sich zu ändern, eine Stärke, die übrigens veränderlich ist, und von der Natur des Metalls und der Flüssigkeit abhängt; 5) daſs (nach 2 und 3) man durch Vermehrung der Metallfläche bei schwacher Electricität mehr gewinnt, als bei sehr starker.

Die Stärke des electrischen Stromes hängt übrigens noch von der relativen Beschaffenheit der festen und flüssigen Substanzen ab, durch welche der Strom geht, und sie ändert sich, wenn man bei demselben Metalle die Flüssigkeit wechselt, oder bei derselben Flüssigkeit andere Metalle anwendet; sie erleidet sogar eine Verminderung bei ihrem Übergange von einer flüssigen Substanz in eine andere unmittelbar daran grenzende, oder beim Durchgange durch einen aus zwei heterogenen Metallen bestehenden Leiter. Bei den erhaltenen Resultaten wurden immer die Differenzen berücksichtiget, welche von der eigenen Leitungsfähigkeit jeder Substanz und von anderen Ursachen herrühren, auſser der, welche von der Änderung des Leiters stammt. Bei Versuchen muſste man einen sehr schwachen Strom anwenden, weil da die Differenzen am merklichsten werden. Ich stelle deren mit verschiedenen Metallen, als Platin, Gold, Silber, Quecksilber, Kupfer, Eisen, Blei, Zink und Zinn an, so wie mit verschiedenen Flüssigkeiten, wie mit Salpeter-, Schwefel- und Salzsäure im reinen und verdünnten Zustande, mit essigs. Ammoniak, Pott-

asche, einigen Salzlösungen, wie mit Kochsalz, Salmiak, und schwefels. und salpeters. Salzen. Diese Versuche wurden mit Säulen von verschiedener Stärke, von einem Elemente bis zu 120 Plattenpaaren angestellt, und endlich in jedem Falle die Wirkung mehrerer Metallsalze in der Flüssigkeit vorgenommen. Die Zahl der wechselnden Metalle belief sich bis auf 8, selten darüber; es ist mir aber unmöglich, hier nur einen Theil der Resultate, die mir mit Fleiſs angestellte, über ein Jahr fortgesetzte Versuche dieser Art gaben, anzuführen. Für jetzt will ich nur einige Resultate, die ich beim Vergleich der Leitungsfähigkeit mehrerer aus demselben Metall und verschiedenen Flüssigkeiten, oder aus derselben Flüssigkeit und mehreren Metallen bestehenden Systemen erhielt, mittheilen. Ich bediente mich, wie vorhin, des einfachen Galvanometers, und nahm einen Versuch nach dem anderen vor, oder des Doppelgalvanometers (*Nobili's* Multiplicators, *B.*), der gleichzeitig mehrere Versuche anzustellen gestattete, und bei welchem die Vergleichung genauer wird, besonders wenn man einen Strom anwendet, der vermöge seiner Natur schnelle Veränderungen erleidet, wie z. B. ein sehr starker und durch eine kleine Plattenzahl bewirkter Strom. Ich begann diese Versuche mit mehreren Flüssigkeiten und Platin, einem fast unangreifbaren Metall. Zu diesem Behufe bediente ich mich kleiner, cylindrischer, einen Zoll und weniger weiter Gläser mit der Flüssigkeit, und zweier einander parallel darein gestellter Platinplatten, die um 4 L. von einander entfernt waren. Jede Platte war auf einen Quadratzoll, oder, wenn man beide innere Seiten berücksichtiget, auf zwei Quadratzoll in die Flüssigkeit getaucht. Wollte man die Wirkung mehrerer Abwechslungen von Platin und Flüssigkeit untersuchen, so nahm man mehrere neben einander stehende Gläser,

die mit gekrümmten Platinstreifen mit einander verbunden waren, welche in jede Flüssigkeit vertical auf einen Quadratzoll groſse Oberfläche eingetaucht waren.

Alle diese Metallbögen waren hierauf mittelst einer gefirniſsten Holzleiste verbunden, damit die zu zwei Bögen gehörigen, und in dasselbe Glas getauchten Platten immer einerlei Entfernung behielten, und der ganze Apparat vollkommen fest war. Man konnte leicht zwei, vier, sechs, acht und mehr Platten mittelst kleiner, kupferner, angelötheter Querstäbe mitten an jedem Bogen, und senkrecht auf die Holzleiste in den Strom bringen; der Apparat glich daher in seiner Zusammensetzung einem Trogapparate, nur mit dem Unterschiede, daſs die Metalle homogen waren.

Ich brauchte aber zwei vollkommen ähnliche Apparate, um ein Metall mit zwei Flüssigkeiten gleichzeitig versuchen zu können. Unter allen Flüssigkeiten verminderte die Salpetersäure, wenn sie sich zwischen der Platinplatte befand, den electrischen Strom am wenigsten, doch war der Verlust merklich; nach dieser folgt Salzsäure, und hierauf Schwefelsäure. Reine, aber stark verdünnte Salpetersäure vermindert den Strom mehr als concentrirte, verdünnte Schwefelsäure hingegen weniger als concentrirte. Nach den genannten Säuren folgen Pottasche und Ammoniak, die fast gleiche Wirkung ausüben, und die Salzlösungen, die den Strom weniger schwächen als die Alkalien, aber mehr als die Säuren. Diese Resultate sind frei von jedem Einflusse der Leitungsfähigkeit der Flüssigkeiten. Ich habe mich überzeugt, daſs der Strom, welcher durch jede der Flüssigkeiten gegangen war, deren ich mich bediente, nicht merklich geschwächt wurde, wenn man den in der Flüssigkeit zurückzulegenden Weg verlängerte, um so weniger, als diese Flüssigkeit im Querschnitt stets nur ei-

nen Quadratzoll hatte, und die zwischen den zwei Polen enthaltene Säule nicht über 1 F. lang war. Wenn es wahr ist, daſs eine Vermehrung der Anzahl der Moleculs des Flüssigen auf das Doppelte, Dreifache etc. die Intensität nicht schwächt, so muſs man daraus schliessen, daſs der Verlust der Electricität in diesem Falle Null oder fast Null ist, in so ferne er vom Leitungsvermögen abhängt, und daſs der Unterschied in der Leitungsfähigkeit einer ganz metallischen und einer gemischten Kette von der Schwierigkeit abhängt, mit welcher die Electricität vom festen Leiter in den flüssigen übergeht, nicht aber von den Hindernissen im flüssigen Leiter selbst. Einen noch frappanteren Beweis werden wir darin finden, daſs man einen gemischten Leiter von derselben Güte, wie einen metallischen, erhalten kann, wenn man den beim Wechsel des Leiters erfolgenden Verlust verschwinden macht. Wir werden sehen, daſs dieses der gewöhnlichen Ansicht ganz entgegen ist, nach welcher man die Verminderung der Electricität der unvollkommenen Leitungsfähigkeit der Flüssigkeiten zuschreibt, deren gröſster Theil nur von dem Wechsel des Leiters herrührt. Dieses kann man dadurch beweisen, daſs man in den Kreis mittelst gleich langer und gleich dicker Platindrähte Schwefel- und Salpetersäure in sehr reinem Zustande bringt, und dafür sorgt, daſs die Säuren in ganz gleichen Röhren sich befinden; da findet man, daſs die Schwefelsäure viel weniger leitet als die Salpetersäure, und daſs eine Verminderung in der Länge der ersteren, statt den Unterschied auszugleichen, keinen merklichen Einfluſs darauf ausübt. Taucht man aber die Platindrähte in Salpetersäure, bevor sie in die Schwefelsäure kommen, so gleicht sich die Leitungsfähigkeit beider fast aus, so lange die dünne Salpetersäureschichte nicht ganz verschwunden ist, welches beweiset, daſs

der zuerst bemerkte große Unterschied nur von der Schwierigkeit des Mittelwechsels abhängt, die bei der Salpetersäure geringer ist als bei der Schwefelsäure. Will man sich gegen die kleinen von der Leitungsfähigkeit der Flüssigkeiten herrührenden Differenzen verwahren, so darf man nur die Größe des Querschnittes der Flüssigkeit beständig lassen, und allein die Anzahl der Abwechslungen vermehren. Ich habe in folgender Tafel die Resultate der Versuche angegeben, die ich mit 0, 1, 2, 3 Alternativen erhielt, wobei ich mit Alternative 0 den Fall bezeichne, wo die zwei Platinplatten in dasselbe Glas reichen, mit Alternative 1, wo sie in zwei verschiedene mit einer Platinalternative verbundene Gefäße reichen, u. s. f. Die Wirkung ist durch die Größe des Ablenkungswinkels der Nadel am Galvanometer angegeben. Vergleichbar sind jene Resultate unter einander, wo die Ablenkung, mithin die Stärke des Stromes dieselbe oder fast dieselbe ist, so wie im Falle der Alternative 0. Diese sind zusammengestellt.

Versuche mit einer Säule von 40 Plattenpaaren.

Zahl d. Abwechslungen.	0	1	2	3
Concent. Salpetersäure	65°	61°	59°	57°
» Schwefelsäure	64	56	48	40
Verdünnte Schwefels.	62	59	52	44
Ammoniak	64	53	46	36
Essigsäure	61	47	38	29
Concentrirte Salpeters.	74	72	70	68
Verdünnte Schwefels.	74	70	67	62
Concentrirte Salpeters.	77	76	74	72
» Schwefels.	78	76	74	69

Versuche mit einer Säule von 20 Plattenpaaren.

Zahl d. Abwechslungen.	0	1	2	3
Concent. Salpetersäure	67°	61°	52°	41°
» Schwefelsäure	72	63	44	12
Ammoniak	64	45	34	23
Concentrirte Schwefels.	52	31	7	kaum merkl.
Verdünnte »	52	36	13	3
Concentrirte Salpeters.	78	74	69	61
Verdünnte »	78	73	67	53
Salzsäure	77	73	68	57

Diese Tafeln zeigen die schon bekannte Wahrheit, daſs der Verlust der Electricität verhältniſsmäſsig stärker ist, wenn sie von 20, als wenn sie von 40 Plattenpaaren kommt. Daher rührt es auch, daſs die von den Flüssigkeiten herstammenden Differenzen in der zweiten Tafel am merklichsten sind. Aber auch dieselbe Flüssigkeit, wie Ammoniak, welche in der ersten Tafel den Strom mehr schwächt als Schwefelsäure, vermindert ihn in der zweiten mit derselben Anzahl der Abwechslungen weniger als dieselbe Säure. Diese Anomalie ist nicht die einzige, auf welche ich stieſs. Eine andere noch mehr bizarre ist diese: Ich brauchte in einem Systeme von drei Abwechslungen mit concentrirter Schwefelsäure statt einem Gefäſs mit dieser Säure, eines mit Ammoniak, und glaubte dadurch die Leitungsfähigkeit des Systemes nicht zu ändern, weil ich mich vorher überzeugt hatte, daſs die Leitungsfähigkeit des Ammoniaks ohne Abwechslung der der Schwefelsäure mit einer Abwechslung gleiche, fand aber die Leitungsfähigkeit des gemischten Systemes viel gröſser, als die des reinen. Das-

selbe Resultat erhielt ich, wenn ich Ammoniak mit einer eben so leitenden Flüssigkeit ersetzte, z. B. mit sehr verdünnter Schwefelsäure. Man kann daraus den allgemeinen Satz ableiten, daſs ein Strom von bestimmter Intensität bei einer bestimmten Anzahl von Abwechslungen in einem geringeren Verhältnisse geschwächt wird, wenn er auf die beim Durchgange durch einen flüssigen unvollkommenen Leiter ohne Abwechslung vorhandene Stärke reducirt ist, als wenn er beim Durchgange durch einen guten Leiter oder eine bestimmte Anzahl von Abwechslungen dahin gebracht ist. Ein anderes sehr sonderbares Phänomen bot sich mir dar, als ich zwischen zwei in der Kette befindlichen Plattenblechen ein Gemische von zwei gleichen Theilen Salpetersäure und Wasser anbrachte. Diese Flüssigkeit gestattete einen schwächeren Strom, als wenn die Säure concentrirt gewesen wäre, aber die Magnetnadel wich um 5° mehr ab. Hier gab es keine Abwechslung, der Apparat bestand bloſs aus zwei Plattinblechen, die in die verdünnte Säure reichten. Als ich den negativen Draht weggenommen, und einen Augenblick der Luft ausgesetzt, hierauf aber an seinen Platz gebracht hatte, war der Strom anfänglich nicht mehr so stark, und das Maximum der Abweichung stellte sich erst einen Augenblick darauf ein. Als ich den positiven Draht wegnahm, und wieder an seine Stelle brachte, erreichte der Strom gleich sein Maximum. Ich vermuthe, dieses komme von einer Anhäufung von etwas salpetriger Säure um den negativen Draht her, welche, indem sie am Metalle eine Schichte bildete, den Übergang des Stromes erleichterte. Ich prüfte diese Vermuthung, indem ich in dieselbe Säure den negativen Pol tauchte, bevor ich ihn in die leitende Flüssigkeit brachte, und wirklich erreichte die Nadel ihre gröſste Ablenkung, sobald diese Schichte ganz gebildet war.

Taucht man mehrere Abwechslungen von Platin in die mit Wasser verdünnte Säure, so gelangt die Nadel nicht gleich zu ihrer gröfsten Ablenkung, sondern durch eine von 5° — 5° erfolgende sprungweise Bewegung, und die Zahl der Sprünge gleicht jener der Abwechslungen; und wirklich ist jede successive Vermehrung des electrischen Stromes durch eine Anhäufung einer Schichte von salpetriger Säure an jeder Metallfläche determinirt, woraus eine Erleichterung des Übergangs der Metalle in die Flüssigkeit hervorgeht. Ich habe, um diese Anomalien genau kennen zu lernen, ein Doppelgalvanometer und zwei Systeme von ähnlichen Platinabwechslungen in verschiedenen Flüssigkeiten gebraucht. Diese zwei Systeme wurden gleichzeitig in die Kette gebracht, und der Strom vertheilte sich in ihnen nach Verhältnifs ihrer Leitungsfähigkeit. In diesem Falle zeigte die Richtung der Ablenkung der Magnetnadel, durch welches System der Strom am leichtesten geht. Auf diesem Wege gelangte ich zu denselben Resultaten, wie durch einfache Vergleichung der Ablenkungswinkel der Nadel des einfachen Multiplicators. Dessen ungeachtet suchte ich eine gleiche Leitungsfähigkeit zweier Systeme zu erzielen, indem ich die gröfsere Leitungsfähigkeit des einen durch Verminderung der mit der Flüssigkeit in Berührung stehenden Metallfläche, oder durch Vermehrung der Anzahl der Abwechslungen, durch welche der Strom gehen mufste, abänderte. Die erste Art der Compensation führte mich nicht, oder nur sehr selten, zum Ziele, weil der Strom sehr stark war; so z. B. leitete das System mit Salpetersäure immer besser als das mit Schwefelsäure bei einer gleichen Anzahl von Abwechslungen, selbst wenn die Berührungsfläche im ersten zehn Mal gröfser war als im zweiten. Die andere Art der Ausgleichung gab entscheidendere Resultate. Hier folgen einige

Beispiele. Die zwei Flüssigkeiten, welche mit einander verglichen wurden, waren concentrirte Schwefel- und Salpetersäure, die Platinplatten waren in beide gleich eingetaucht. Bei einer Abwechslung ging der Strom ganz durch die Salpetersäure; mit einer Abwechslung in der Schwefelsäure, und zwei in der Salpetersäure, zeigte die Magnetnadel eine Ablenkung von 30°, und hierauf eine von 20° zu Gunsten der Schwefelsäure. Jedes System allein in den Kreis gebracht gab eine Ablenkung von 65°. Wurde die Anzahl der Abwechslungen verdoppelt, so wich die Nadel um 20° zu Gunsten der Salpetersäure ab, und der Strom bewirkte beim Durchgehen durch eines oder das andere der zwei Systeme eine Ablenkung von 20° — 30°. Hieraus folgt, daſs die zwei vereinten Abwechslungen in der Schwefelsäure schlechter leiten, als vier in der Salpetersäure, wiewohl eine Abwechslung der erstern Säure besser als zwei der zweiten leitet. Ich glaube die Erklärung dieser Anomalie darin zu finden, daſs der Strom im erstern Falle stärker ist als im zweiten, indem er durch die gröſsere Anzahl von Abwechslungen eine gröſsere Schwächung erlitten hat. Da man nun weiſs, daſs eine Differenz in der Stärke der Electricität das Verhältniſs zwischen der Leitungsfähigkeit ähnlicher Systeme abändert, so darf man sich nicht wundern, daſs dieses hier eintritt. Zur Begründung dieser Erklärung erwähne ich, daſs ich, als ein gleich ursprünglich schwächerer Strom angewendet wurde, fand, zwei Abwechslungen der Salpetersäure leiten besser, als eine der Schwefelsäure. Wir können daher den Schluſs ziehen, daſs jedes System, worin Schwefelsäure den flüssigen Leiter abgibt, verhältniſsmäſsig durch eine Differenz in der Stärke des Stromes mehr gewinnt oder verliert, als ein System mit Salpetersäure. Ich halte es für überflüssig, zu sagen, daſs

drei Abwechslungen in Salpetersäure weniger gut als eine, und besser als zwei in der Schwefelsäure leiten. Auch Salz- und Salpetersäure gaben immer bei der Vergleichung beider einige interessante Resultate. Mit einer Abwechslung in jeder erhielt ich 48° Ablenkung von Seite der Salzsäure, und der durch jedes einzelne System gehende Strom gab 75°; mit zwei, drei und vier Abwechslungen ergaben sich immer einige Grade mehr zu Gunsten der Salzsäure, aber mit fünf Abwechslungen hatte ich 15° von Seite der Salpetersäure; der durch jedes einzelne System gehende Strom gab 30°. Diese Versuche zeigen, dafs für eine gleiche Anzahl Abwechslungen die Salzsäure besser leitet als die Salpetersäure, falls die Electricität stark ist, und minder gut, wenn diese schwach ist. Dieses Phänomen bewährte sich bei der Anwendung sehr starker und sehr schwacher Ströme. Man kann den Versuch leicht wiederholen, indem man zwei Platinplatten oder Drähte in Salzsäure, und zwei andere in Salpetersäure taucht. Wenn die Electricität stark ist, geht der Strom leichter durch die Salzsäure, wenn sie schwach ist, leichter durch Salpetersäure.

Es bleibt mir nur noch übrig, von den zahlreichen Phänomenen zu sprechen, welche bei verschiedenen festen Leitern eintreten. Ich habe schon im vorigen Mémoire gesagt, dafs Kupfer den Strom leichter in eine Flüssigkeit übergehen läfst, als Platin, und Zink leichter als Kupfer; ich habe auch hinzugesetzt, dafs mir die Leichtigkeit dieser Transmission von der Stärke der auf das Metall ausgeübten chemischen Wirkung abzuhängen scheint. Eine Menge Versuche haben dieses bestätiget. Um die kleinsten Differenzen wahrzunehmen, ist es besser, sich eines sehr schwachen Stromes zu bedienen. Ich füllte zwei Gefäfse mit derselben Flüssigkeit, und tauchte in jedes ein *Volta*'sches Plattenpaar, das sich am

Ende des Drahtes eines Galvanometers befand. Wurden beide Flüssigkeiten mittelst Metallbögen von gleicher Gröſse und Oberfläche, aber verschiedener Natur, verbunden, so konnte ich leicht mit der Ablenkung der Magnetnadel die gröſsere oder kleinere Leichtigkeit beurtheilen, mit welcher der electrische Strom von der Flüssigkeit in jedes derselben übergeht. Der Platinbogen bewirkte mit verdünnter Säure eine Ablenkung von einigen Graden, Silber eine gröſsere, hierauf folgten Kupfer, Zinn, Eisen, Zink, und in dieser Ordnung scheinen mir auch die Metalle in Betreff der chemischen Wirkung auf einander zu folgen. Aber nicht bloſs die Ablenkung der Magnetnadel, sondern auch die Wasserstoffgasmenge, die sich am negativen Elemente entwickelte, variirte nach der Natur der Metallbögen, welche die zwei Gläser mit einander verbanden. Mit Platin war nichts davon bemerkbar, mit Gold fast nichts; sie wurde aber immer gröſser, so wie der Metallbogen mehr angreifbar war. Um zu zeigen, daſs die eigene Leitungsfähigkeit des Metalls darauf keinen Einfluſs nehme, nahm ich zur Verbindung beider Gläser bald einen 2 L. dicken Platindraht, bald einen Bleidraht von $^1/_4$ L. Dicke; im ersten Falle war die Ablenkung der Nadel kaum bemerkbar, im zweiten war der Strom sehr stark, aber selbst bei gleich dicken Drähten leitet Platin mehr als Blei, wie sich aus den Versuchen *Becquerel's* ergab, aber Blei wird von der Flüssigkeit angegriffen, nicht aber Platin. Ein eiserner Bogen gestattet einen stärkeren Strom als ein Kupferbogen, wenn man sie abwechselnd braucht, um die zwei Gefäſse, worin sich die Platten befinden, zu verbinden, wenigstens wenn sie eine verdünnte Säure oder eine Salzlösung enthalten; enthielten sie aber Ammoniak, so war der Strom kaum merklich beim Gebrauch eines Eisendrahtes, aber sehr sark, wenn man einen Kupferdraht

anwendete. Auch dieses ist eine Folge der chemischen Wirkung. Das Eisen leitet im ersten Falle, wo es mehr angegriffen ist, mehr als Kupfer, im zweiten, wo es weniger angegriffen ist, weniger. Will man sich nur an Thatsachen halten, so kann man folgende Relation zwischen der Eigenschaft eines festen Körpers, die Electricität in eine Flüssigkeit abzuleiten, und der Natur der Electricität, die er in dieser Flüssigkeit erlangt, aufstellen: Von zwei homogenen oder heterogenen in eine Flüssigkeit getauchten Metallflächen ist die, welche die Electricität mit dem geringsten Verlust leitet, in derselben Flüssigkeit, gegen die andere positiv, wenn beide zu einem *Volta*'schen Plattenpaare vereiniget sind. Man kann auch sagen, die Electricität bestimme diese beiden Phänomene; es ist auch wahrscheinlich, daſs es sich so verhält, aber das aufgestellte Gesetz ist von jeder Hypothese unabhängig. Ich könnte noch von den Versuchen sprechen, die ich mit stärkern Strömen über die Leitungsfähigkeit verschiedener Metalle und Flüssigkeiten angestellt habe, aber ich werde in einem folgenden Mémoire darauf zurückkommen, das die detailirte Untersuchung des dritten auf die Stärke der Electricität Einfluſs nehmenden Umstandes enthält. Ich kann aber nicht schlieſsen, ohne zu bemerken, daſs schon vor ein oder zwei Jahren mein Vater den Einfluſs der chemischen Wirkung der Flüssigkeit auf die darein getauchten Metallplatten bemerkt hat in Betreff der Erleichterung des Durchganges der Electricität nicht bloſs zur Erzeugung magnetischer, sondern auch anderer Wirkungen, besonders der Zersetzungen. Die Resultate der Versuche über den Einfluſs der relativen Natur des festen Leiters auf den untersuchten Gegenstand sind also:

1) Daſs die Schwächung der Electricität beim Übergange von Platin in eine Flüssigkeit von der Natur der

letzteren abhängt; 2) daſs auch die Stärke des Stroms darauf Einfluſs hat, so daſs eine Flüssigkeit, die einen bestimmten Strom besser leitet als eine andere, einen stärkeren oder schwächeren besser oder schlechter leitet; 3) daſs die Electricität von irgend einem Metalle in irgend eine Flüssigkeit desto leichter übergeht, je leichter das Metall von der Flüssigkeit angegriffen wird; 4) daſs, unabhängig von der chemischen Wirkung, eine beständige Relation besteht zwischen der Erleichterung des Übergangs der Electricität in eine Flüssigkeit von einem Körper, und der Natur der Electricität, die er in Berührung mit einem anderen gibt.

2. Künstliche Blitzröhren.

(A. a. O. p. 319.)

Die französischen Academiker *Hachette*, *Savart* und *Beudant* versuchten es, Blitzröhren künstlich zu erzeugen. Zu diesem Ende wurde in einen Backstein ein Loch gemacht, mit zerstoſsenem Glase gefüllt, und durch letzteres die Batterie aus *Charles* Cabinet, die stärkste in Paris vorhandene, entladen. Der Versuch glückte vollkommen. Sie erhielten bei einem Versuche eine Röhre von 25 Millim. Länge, deren äuſserer Durchmesser unregelmäſsig von einem Ende zum anderen abnimmt, und 3 — 1 $^1/_2$ Millim. beträgt; der innere Canal ist $^1/_2$ Millim. weit. Zwei andere Versuche lieferten kleinere und weniger gut gestaltete Röhren. Mit gepulvertem Feldspath und Quarz gelang der Versuch nicht. Übrigens waren die Röhren inwendig gebräunt, wahrscheinlich vom Eisenoxyd; doch haben sie bei weitem nicht die Festigkeit der von Dr. *Fiedler* gefundenen, welches wahrscheinlich von der verhältniſsmäſsig zu geringen electrischen Kraft bei den Versuchen herrührt.

B. Magnetismus.

1. Über den Magnetismus der Drähte eines Multiplicators. Von *Nobili.*

(*Bibl. univ. Mai* 1818, *p.* 79.)

Nobili machte die Bemerkung, daſs sich die Nadeln seines Multiplicators, wenn sie vollkommen gleiche magnetische Kraft hatten, und daher vollkommen astatisch waren, nie auf den Nullpunct der getheilten Scheibe unterhalb derselben einstellen lieſsen, und daſs sie stets um 15° — 20° von dieser Linie abwichen. Er suchte die Ursache dieser Abweichung anfangs in einer magnetischen Eigenschaft der Scheibe und der Rahme, die beide aus Messing bestanden, oder in der Windung des Aufhängungsfadens. Er versuchte die Nadel einzustellen, nachdem er die Scheibe aus Papier, und die Rahme aus Holz gemacht hatte, und den Apparat auf dem Gestelle etwas wendete, um die Nadeln ohne Torsion des Fadens auf den Nullpunct zu bringen. Alles dieses führte nicht zum erwünschten Ziele, ja er konnte die Nadeln nicht einmal dann auf den Nullpunct der Scale bringen, als er den Aufhängungsfaden zum Drehen eingerichtet hatte. Nun blieb nichts mehr übrig, als anzunehmen, die Nadeln werden durch den Magnetismus des gewundenen Drahtes abgelenkt. Dieser Draht war so gewunden und in zwei Parthien getheilt, daſs er durch eine rhomboëdale Öffnung auf die getheilte Scheibe von oben herab zu sehen erlaubte. War er magnetisch, so befanden sich die Magnetnadeln in demselben Falle, als wenn sie zwischen zwei neben einander befindlichen parallelen Magnetnadeln schwebten. Die Nadeln sind zwar im Gleichgewichte, wenn sie sich mitten zwischen den zwei Magneten und parallel mit ihnen befinden, jedoch ist dieses Gleichgewicht labil, die kleinste Erschütterung hebt

es auf, und bringt sie in die stabile Lage, wo einer ihrer Pole gerade unter einem Pole der magnetischen Drähte sich befindet. *Nobili* fand diese Eigenschaft an allen Kupferdrähten, die er anwendete; keiner derselben enthielt einen merklichen Antheil an Eisen, wovon er sich dadurch versicherte, daſs er den Kupferdraht in Salpetersäure auflöste, und die Auflösung mittelst blausaurem Kali auf Eisen prüfte. Die magnetische Wirkung des Kupfers ist schon bei einer geringen Masse desselben sehr merklich. Sechs oder sieben Kupferdrähte von $^1/_4$ Millim. Dicke, mit einander vereiniget, nahmen zwei Magnetnadeln schon aus der Entfernung von 1 Millim. bei ihrer Bewegung mit sich fort, und lenkten sie um 15° — 20° ab, bevor sie selbe verlieſsen. *Nobili* untersuchte auch Platin- und Silberdrähte. Platindrähte, zu einem Büschel vereiniget, übten zwar auf das System von Magnetnadeln eine kleinere Wirkung aus, als Kupfer, doch blieb diese hinreichend bemerkbar; Silberdraht hingegen blieb ohne solche Einwirkung. An einem Multiplicator mit Silberdraht lieſsen sich die Magnetnadeln vollkommen auf den Nullpunct einstellen, und die Empfindlichkeit dieses Instruments war sechs und mehrmal grösser als mit Kupferdrähten. Ein Strom, der an einem Multiplicator mit Kupferdrähten eine Ablenkung von 1° — 2° hervorbringt, erzeugt bei einem mit Silberdraht eine Ablenkung von 6° — 12°.

2. Einrichtung des Sideroscops und mit demselben angestellte Versuche. Von *Le Baillif* und *Saigey*.

(Bull. des scien. math. etc. Tome 8 et 9.)

Schon im dritten Bande, S. 246 dieser Zeitschrift wurde ein Instrument unter dem Namen Sideroscop angezeigt, mittelst welchem man die bisher unerklärbare

Abstofsung, welche Spiefsglanz und Wismuth auf beide Pole eines Magnetes ausüben, bemerkt hat. Die Quelle, aus welcher diese Anzeige entlehnt war, gab die Einrichtung des genannten Instrumentes weder hinreichend detailirt noch ganz richtig an, auch ist von keinem anderen Versuche die Rede, als von der Abstofsung eines magnetischen Poles durch Spiefsglanz und Wismuth. Die oben angezeigte Quelle enthält aber eine vollständige Beschreibung dieses Instrumentes, und zugleich eine Reihe interessanter Versuche, welche damit angestellt wurden; daraus soll hier das Wichtigste mitgetheilt werden, um so mehr, da die neuesten in Frankreich erschienenen physikalischen Werke, nämlich die *Cours de Physique, par M. Gay-Lussac,* und *Elémens de Physique exp. et de Météorologie, par Pouillet,* dieses Instrumentes mit Beifall erwähnen.

Das genannte Bulletin enthält eine Beschreibung des Sideroscopes von *Le Baillif* (Tome 8, p. 87), und eine andere von *Saigey* (Tome 9, p. 89), es weichen aber beide in wesentlichen Puncten von einander ab. Wir wollen beide im Allgemeinen hören:

Nach *Le Baillif* besteht das Sideroscop aus einem sehr feinen reifen Strohhalm von 9 Z. Länge, der am einen Ende zwei magnetisirte Nähnadeln trägt, deren gleichnamige Pole entgegengesetzte Richtungen haben, und unter einem rechten Winkel gegen den Halm befestiget sind; am anderen hingegen ist eine einzige Magnetnadel angebracht, so dafs der ganze Apparat drei Magnete enthält. Der Halm sammt den Nadeln wird an einem ungezwirnten Seidenfaden von 12 Z. Länge in einem Glaskasten aufgehängt, wie dieses mit dem Hebel an *Coulomb's* electrischer Wage geschieht.

Der Halm kann von Hafer, Rocken oder Weitzen genommen werden, er mufs aber sehr fein und ganz

gerade seyn. Fast alle Halme sind krumm; um sie gerade zu richten, befestiget man an jedem Ende eines solchen einen Feilkloben, hält den Halm vertical, und belastet ihn unten mit einem Gewichte von 2 Pf., befeuchtet ihn, und streicht ihn der ganzen Länge nach mit einem heifsen Biegeleisen. Eine Nadel wird in das dünnere Ende des Strohhalms eingesteckt; sie soll 16 L. Länge, und ein Gewicht von etwa 1 $^1/_2$ Gr. haben, bis zur Sättigung magnetisirt seyn, und dann mit der Spitze bis nahe zur Hälfte ihrer Länge in den Halm hineinreichen. Am anderen Ende werden die Nadeln nicht unmittelbar angebracht, sondern man nimmt einen 2 Z. langen Halm, der in die Höhlung des längeren geschoben werden kann, und darin durch Reibung fest hält, und steckt 6 L. von einem Ende mitten und quer durch ihn eine etwa 1 Gr. schwere zur Sättigung magnetisirte Nadel, und 4 L. von dieser entfernt eine zweite mit der ersten parallele, und befestiget beide am Halme mittelst starkem Leim oder Gummiwasser. Dieses Halmstück wird nun in die Höhlung des dickeren Endes vom längeren Halm gesteckt, und dieser Halm mittelst einer papierenen Scheide an einem ungezwirnten Seidenfaden von 12 Z. Länge in einem Glaskasten so aufgehängt, dafs die zwei parallelen Nadeln genau eine horizontale Lage annehmen, und der Halm nach Belieben gehoben oder gesenkt werden kann, damit er, so lange man das Instrument nicht braucht, auf dem Boden des Kastens ruhe. Der Kasten bekommt ein 14 Z. langes, 6 Z. breites Bret zur Basis, welches nach der Länge und nach der Breite zwei parallele Furchen hat, die mit Seidenbändern ausgefüttert sind, und in welche der untere Rand des Glaskastens so genau pafst, dafs kein Luftzug auf den Halm wirken kann. An dieser Basis ist auf Papier mit gehörigem Radius ein getheilter Kreisbogen angegeben, dessen Nullpunct in die,

die Basis der Länge nach halbirende Linie fällt. Der Glaskasten wird mit 3 Z. Höhe angegeben; an dessen Decke erhebt sich eine Glasröhre, in welcher sich der Aufhängungsfaden befindet, und in gehöriger Entfernung davon ist eine Öffnung angebracht, deren Brennweite 3 Z. beträgt, und die sich genau über dem Nullpuncte der Theilung am Boden befindet. Ein im Gesichtsfelde gespannter Faden soll dem Nullpuncte der Scale entsprechen. An der schmäleren Seite des Kastens, welcher die einfache Nadel zugewendet ist, wird eine Vorrichtung angebracht, wodurch man die nöthige Öffnung erhält, um die Körper in den Kasten bringen zu können, deren Einwirkung auf die Magnetnadel man zu erfahren wünscht.

Saigey's Beschreibung des Sideroscopes weicht in manchem wesentlichen Puncte von der vorhergehenden ab. Die Länge des Halmes ist mit 42 Cent. (18 Z.) angegeben, und daher auch der Glaskasten 56 Cent. (21 Z.) lang, 21 Cent. (8 Z.) breit, und 17 Cent. (6 $^1/_2$ Z.) hoch. Die darüber befindliche Glasröhre, welche den Coconfaden enthält, ist 36 Cent. (13 $^1/_4$ Z.) hoch, und oben mit einem Stöpsel verschlossen, durch dessen Axe ein dünner Glasstab geht, der sich verschieben läfst, und in jeder Lage durch Reibung festhält. An seinem unteren Ende ist der Aufhängungsfaden befestiget, und durch Heben oder weiteres Hinabdrücken dieses Stabes läfst sich auch der Halm heben und senken. Die wesentlichste Abweichung dieses Instrumentes von dem *Le Baillif's* besteht darin, dafs hier nur zwei Magnete angewendet werden, jeder an einem Ende des Halmes mit der Längenrichtung desselben parallel, und so, dafs sie sich die gleichnamigen Pole zuwenden, und daher der ganze Apparat astatisch ist. Jeder Magnet ist cylindrisch und 1 Millim. ($^1/_2$ L.) dick, einer derselben 40.8 Millim.

(1 $^1/_2$ Z.), der andere 42 Millim. (1.6 Z.) lang. Die Empfindlichkeit dieses Apparates hängt von dem mehr oder weniger astatischen Zustande desselben ab. Man kann ihn völlig astatisch machen, indem man einen Magnet dem anderen mehr oder weniger nähert.

Welche von beiden Einrichtungen verdient nun den Vorzug?

Gay-Lussac und *Pouillet* beschreiben in ihren oben genannten Werken das Sideroscop, wie es *La Beullif* angibt, doch bemerkt Letzterer, die zwei quer über den Halm angebrachten Nadeln sind unter sich astatisch, und könnten eben so gut ganz wegbleiben. Ich wäre sehr geneigt, der Einrichtung, wie sie *Saigey* angibt, den Vorzug zu ertheilen, weil er vollkommen astatisch gemacht, und daher für äufsere Einwirkungen ungemein empfindlich eingerichtet werden kann.

Das Sideroscop ist so leicht beweglich, dafs man beim Gebrauche desselben sehr leicht getäuscht werden kann. *Gay-Lussac* erinnert, dafs schon die Wärme der ziemlich ferne gehaltenen Hand durch die im Innern des Kastens erregten Luftströme eine Ablenkung des Halmes hervorbringt, und *Saigey* gibt mehrere äufsere Einflüsse an, welche störend beim Gebrauche dieses Instrumentes wirken, die sich fast alle auf die von *Gay-Lussac* angegebenen zurückführen lassen. Schon *Le Baillif* hat in mehreren Substanzen Magnetismus nachgewiesen, worin man ihn nicht vermuthete, oder doch nicht beweisen konnte. Er sagt, alle französischen und ausländischen, alten und neuen Münzen von Gold, Silber und Kupfer, besonders die in Italien geprägten Silbermünzen, ziehen das Sideroscop mächtig an; eben so wirken auf dasselbe alle Gattungen Asche, die mittelst Gummiwasser zu Würfeln von 3 — 4 L. Fläche zusammengeknetet sind, Zucker, der sich zu spinnen

anfängt, Chocolat, Bouteillenglas, grüner und schwarzer Turmalin, Granat, künstlicher venetianischer Avanturin, rhomb. Quarz, gelber Topas, grüner Talk, schwefelsaures und blausaures Eisen, phosphorsaure Kalkerde, vulcanischer Tuff und alle vulcanischen Producte, alle nicht chemisch reinen Metalle, messingene Nadeln, alle Aërolithen, gebranntes Kühhorn, calcinirtes Blut. *Saigey* hat an mehreren Eisenerzen und Eisenpräparaten einen selbstständigen, von ihrer Lage gegen die Weltgegenden unabhängigen, Magnetismus nachgewiesen, und sogar seine Intensität gemessen. Noch merkwürdiger ist es aber, daſs er mittelst des Sideroscopes nachgewiesen haben will, alle Körper üben in der Luft auf einander eine Abstoſsung aus. Daſs man eine solche Kraft am Wismuth und Spieſsglanz nachgewiesen hat, wurde schon früher in dieser Zeitschrift angegeben. *Saigey* bestätiget dieses nicht bloſs, sondern dehnt diese Abstoſsung auf alle Körper aus. Nähert man, sagt er, der Magnetnadel einen Körper, der eisenhältig ist, so soll eine Anziehung vermöge des Eisengehaltes, und eine Abstoſsung vermöge dieses allgemeinen Gesetzes erfolgen. Sind beide Wirkungen einander gleich, so bewegt sich die Nadel nicht; ist aber eine gegen die andere überwiegend, so erfolgt vermöge der Differenz der zwei Kräfte eine Abstoſsung oder Anziehung. Derselbe Körper kann auch alle drei Wirkungen ausüben, wenn man seine Oberfläche und Lage ändert, besonders gilt dieses von fast reinen Metallen. *Saigey* besitzt einen kleinen sehr durchsichtigen Turmalin, bei dem diese dreifache Wirkung nach Verschiedenheit seiner Lage gegen den Magnet eintritt.

Um die Wirkung zweier Metallstücke auf einander zu erforschen, wurden Stücke von den käuflichen Metallsorten zu kubischen Körpern von einem Kubikcenti-

meter Inhalt durch Schleifen an einem Schiefersteine geformt, und eben so prismatische Stücke von einer Quadratcentimeter-Fläche und 0.6 Millimeter Dicke, die sich in eine schweifförmige Verlängerung endigten. Mittelst dieser wurde ein solches Stück statt des magnetischen Cylinders (der mitten in den Halm hineingesteckt wurde) in den Strohhalm gebracht, der Würfel diesem gegenüber gestellt, und die Repulsion beobachtet. Nach fünf Minuten nahm der Strohhalm gewöhnlich eine fixe Position an. Nun wurde der Würfel vorgeschoben, und die neue Lage des Hebels beobachtet, und so fortgefahren, bis eine Reihe von fünf, zehn oder funfzehn Beobachtungen erhalten war. Nach diesem wurde der Würfel langsam zurückgezogen, und die Zeit abgewarten, wo der Halm wieder ruhig hing. Da man zu einer Reihe von Beobachtungen eine Stunde braucht, so änderte sich innerhalb dieser Zeit der Nullpunct der Nadel, und es muſste unter der Voraussetzung, daſs diese Variation gleichförmig erfolge, nach der von einer Beobachtung zur anderen verflossenen Zeit für jedes Resultat die nöthige Correction im Stande des Hebels angebracht werden. Die Resultate wurden in groſsem Maſsstabe graphisch dargestellt, und von den verschiedenen Ordinaten, welche zu derselben Abscissen gehörten, das Mittel genommen. Auf diese Weise wurden folgende Resultate erhalten, die mit allen Irregularitäten hier angegeben sind. Die Entfernung der Platte vom Würfel beim Beginne des Versuches, und nachdem die Abstoſsung erfolgt war, ist in Millim. ausgedrückt. Die Abstoſsungen, die der Bleiwürfel ausübt, sind aus 75 Beobachtungen zu 5 Reihen, die des Zinnwürfels aus 22 Beobachtungen zu 3 Reihen, die des Wismuthwürfels aus 46 Beobachtungen zu 7 Reihen, die des Antimons aus 40 Beobachtungen zu 6 Reihen, und endlich die des Zin-

kes aus 29 Beobachtungen zu 5 Reihen entnommen. Die Platte bestand aus Kupfer.

Entfernung.	Repulsion des Würfels aus				
	Blei.	Zinn.	Wismuth.	Antimon	Zink.
50	0.33	0.20	0.30	0.24	0.17
40	0.64	0.43	0.61	0.48	0.35
35	1.19	0.84	1.09	0.84	0.58
30	1.86	1.48	1.81	1.44	0.94
25	3.01	2.46	2.80	2.40	1.32
20	4.25	3.52	3.46	2.80	1 54
18	4.90	3.97	4.12	3.15	1.72
16	5.39	4.40	4.81	3.50	1.88
14	6.13	4.93	5.36	3.81	2.08
12	7.10	5.52	5.86	4.15	2.32
10	8.05	6.25	6.17	4.33	2.46
9	8.73	6.62	6.37	4.50	2.61
8	9.47	7.04	6.66	4.66	2.80
7	9.78	7.35	7.03	4.90	3.00
6	10.10	7.72	7.71	5.20	3.30
5	10.42	8.10	8.24	5.70	3.60
4	10.84	8.56	8.74	6.32	3.94
3	11.69	9.25	9.50	7.05	4.43
2	13.10	10.60	11.25	8.10	5.60
1	14.50	12.80	—	—	—

Drückt man die Gröſse der Abstoſsung, welche jeder dieser Körper bei der Entfernung von 1 Mill. ausübt, durch 1 aus, theilt jede der folgenden Abstoſsungen durch die bei 1 Mill. Abstand herrschende, und stellt die so gewonnenen Resultate in eine ähnliche Tafel zusammen; so stellen die Zahlen, welche nun die Repulsion ausdrücken, das Gesetz derselben bei verschiedenen Körpern dar. Mit Ausnahme kleiner Abweichungen, die bei so schwierigen Versuchen allerdings unvermeidlich sind, zeigt sich für alle Körper dasselbe Gesetz, mit denen die Versuche angestellt wurden. Dasselbe

Gesetz bewährte sich auch, als man die zwei Magnetstäbe wieder an ihren Platz im Strohhalme brachte, und einem derselben ein Stück reines Wismuth mehr oder weniger näherte.

Nun suchte *Saigey* zu beweisen, daſs diese Abstossung weder von einer Bewegung der Luft, noch von der gewöhnlichen oder von der galvanischen Electricität, und auch nicht von der Masse der Körper, oder von der Capillarität herrühre. Als Grundursache dieser Abstoſsung wird die Wärme angenommen. Darauf, heiſst es, deuten schon die gewöhnlichen Wirkungen hin, welche eine Entfernung der Theile der Körper von einander zur Folge haben; auch hat *Fresnel* schon früher nachgewiesen, daſs zwei Körper selbst im luftleeren Raume einander abstoſsen, wenn sie durch concentrirtes Sonnenlicht erwärmt werden; endlich zeigt sich auch wirklich diese Repulsion desto gröſser, je höher die Temperatur der sich abstoſsenden Körper ist. Die Wirkung des Bleies auf Kupfer variirte zwischen 1000 und 557, als die Temperatur zwischen 15° und 5° schwankte. *Saigey* hat diesen Einfluſs der Körper auf einander noch auf einem anderen Wege zu erforschen gesucht, nämlich durch die Änderungen der Oscillation einer nicht magnetischen Nadel in der Nähe eines Stabes oder einer Scheibe von Metall, und zieht daraus Schlüsse, welche mit dem Magnetismus bewegter Körper in Verbindung stehen, über den er in einer folgenden Arbeit nähere Aufschlüsse zu geben verspricht.

VI.

Über das pankratische Ocular;

von

I. I. Littrow.

Da das von dem Londoner Arzte *W. Kitchiner* erfundene *Pancratic Eye-Tube* unter uns noch nicht sehr bekannt zu seyn scheint, so wird vielleicht Manchem eine kurze, nähere Anzeige desselben willkommen seyn. — Dieses Instrument ist von unseren gewöhnlichen terrestrischen Ocularen mit vier planconvexen Linsen nur wenig verschieden, sowohl in Beziehung auf die Gröſse und die Brennweiten, als auch auf die beiden äuſseren Distanzen der vier Linsen. Die beiden ersten, dem Auge nächsten, und eben so die beiden letzten Linsen sind in eine besondere Röhre gefaſst, so daſs die Distanzen jener sowohl, als dieser, unter sich unveränderlich sind. Diese beiden Röhren aber werden durch eine dritte verbunden, durch welche jene beiden ersten einander genähert oder von einander entfernt werden können. Das pankratische Ocular unterscheidet sich also von einem gewöhnlichen terrestrischen Oculare mit vier Linsen vorzüglich dadurch, daſs bei jenem die beiden äuſsersten Distanzen der Linsen constant, die mittlere Distanz aber variabel ist, während bei diesem alle drei Distanzen unveränderlich sind. Je mehr bei dem pankratischen Oculare diese mittlere Distanz vergröſsert wird, desto stärker wird die Vergröſserung des Fernrohres. Es liegt in der Natur der Sache, daſs diese Erweiterung der Distanz, und die daraus folgende Vergröſserung des Gegenstandes ihre Grenzen hat, jenseits welchen die Gegenstände schwach beleuchtet und matt erscheinen. Aber

der Vortheil dieser Einrichtung vor der gewöhnlichen besteht darin, daſs diese Grenzen bei einem gut construirten Fernrohre dieser Art sehr ausgedehnt sind. Ich habe ein solches von *Dollond* verfertigtes Ocular mit einem vortrefflichen *Fraunhofer*'schen Objective von sechs Zoll Öffnung verbunden, zu welchem *Fraunhofer* selbst ein gewöhnliches terrestrisches Ocular von 70maliger Vergröſserung gegeben hat, und dadurch die Vergrösserung bis auf 300 gebracht, bei welcher Saturn, und der Schatten seines Ringes noch sehr scharf begrenzt erschien, und feine Doppelsterne, wie Castor oder Bootis, ungemein deutlich dargestellt wurden. Das Ocular war selbst auf eine 600malige Vergröſserung eingerichtet, und man konnte bei 400 noch immer gut sehen, wenn der Gegenstand stark beleuchtet war; über dieser Grenze aber erschien er immer mehr farbig und verwaschen.

Nahe dasselbe leistete auch ein anderes pankratisches Ocular, welches Hr. *Plöſsl* nach dem Muster von jenem verfertigte, und dessen Vergröſserung ebenfalls von 100 bis 600 geht. Da bei unseren gewöhnlichen Ocularen das erste, so wie das zweite Linsenpaar in einer eigenen Röhre gefaſst ist, so kann man auch mit ihnen den Versuch anstellen, und diese beiden kleineren Röhren von einander entfernen, wodurch die mittlere Distanz der Linsen erweitert, und die Vergröſserung verstärkt wird; nur läſst sich hier nicht so weit gehen, da die mittlere Röhre fehlt, die man aber leicht ersetzen kann. Daſs die gröſste Wirkung des pankratischen Oculars nur bei den vollkommensten Objectiven mit starker Öffnung, und bei stark erleuchteten Gegenständen erwartet werden kann, ist für sich klar. Doch wird es auch bei einem gewöhnlichen, gut gearbeiteten und achromatischen Zugfernrohre angenehm und selbst nützlich

seyn, die Vergröſserung desselben von 30 bis 100 und selbst weiter zu bringen, um den verschiedenen Bedürfnissen zu entsprechen, und so auf Reisen u. dgl. mit einem einzigen kleinen Instrumente und mit einem leisen Zuge der Hand dasselbe zu leisten, was früher nur durch eine gröſsere Sammlung mehrerer verschiedener Fernröhre möglich gewesen wäre. — Nach einem erst vor Kurzem erhaltenen Briefe unseres trefflichen Astronomen *Santini* in Padua lassen sich ähnliche Wirkungen auch durch die Veränderungen der beiden anderen Distanzen der vier Ocularlinsen erreichen. Er wird die mir gefälligst mitgetheilte Theorie dieser Oculare in dem nächstens erscheinenden zweiten Bande seiner Optik bekannt machen, und ich begnüge mich daher, hier nur ein nach dieser Theorie berechnetes Beispiel anzuführen, in welchem zugleich auf die Farbenlosigkeit des Bildes gehörige Rücksicht genommen worden ist. Nimmt man die Brennweiten des Objectivs und der vier Oculare gleich 30.0, 2.0, 2.5, 3.0, 1.5 Zolle, und die Distanz der beiden dem Objective nächsten Oculare von einander, oder die erste Distanz gleich 2.9 Zoll, so lassen sich die *beiden* anderen Distanzen auf folgende Weise verändern, um dadurch die nebenstehenden Vergröſserungen zu erhalten:

Erste Distanz = 2.9 Zolle,

Zweite Distanz .	2.5	4.0	5.0	6.0	7.0
Dritte Distanz ..	3.332 ..	2.927 ..	2.720 ..	2.548 ..	2.404
Vergröſserung	21.5 ...	27.3 ...	32.1 ...	37.5 ...	43.5

u. s. w.

Es scheint daher dieser Gegenstand einer besonderen Untersuchung sehr werth zu seyn, um unter allen hier möglichen Einrichtungen die vortheilhafteste und jedem besonderen Zwecke angemessenste Wahl zu treffen, und der ganzen bisher noch so wenig beachteten

Sache die Sicherheit zu geben, deren sich alle einer mathematischen Basis fähigen Gegenstände erfreuen sollten.

Nachschrift vom Herausgeber *A. v. Ettingshausen.*

Der Umstand, dafs die vier Ocularlinsen eines auf gewöhnliche Weise construirten terrestrischen Fernrohres, ohne Verletzung der Reinheit der Bilder, innerhalb gewisser Grenzen im Rohre verschoben werden dürfen, und dafs diese Willkürlichkeit ihrer Stellung zur Erzielung einer schicklichen Vergröfserung oder eines passenden Gesichtsfeldes sich benützen lasse, mufs wohl jedem Verfertiger solcher Fernröhre in die Augen fallen; man wird sich daher nicht darüber wundern, dafs vor Dr. *Kitchiner* Mehrere auf den Gedanken gekommen sind, die Ocularlinsen in verschiedene Auszugröhren zu setzen, um durch Veränderung ihrer Intervalle die Vergröfserung des Fernrohres nach Gefallen bis zu dem Maximum, welches ohne Nachtheil der Deutlichkeit der Bilder erreicht werden kann, zu steigern.

So hat, wie *Biot* im *Précis élémentaire de Physique* (s. 2te Auflage vom Jahre 1821, Tome II., p. 353) berichtet, der rühmlich bekannte Pariser Künstler *Cauchoix* in seinen *lunettes polyaldes* die erste und zweite Ocularlinse (vom Objectivglase an gezählt) beweglich gelassen, wodurch die Vergröfserung nahe auf das Doppelte getrieben werden konnte. Auch versichert unser trefflicher Optiker *Plöfsl*, bereits vor mehr als zehn Jahren Fernröhre, deren Oculare in zwei Auszugröhren vertheilt waren, gesehen zu haben.

Soll jedoch die hier erwähnte Einrichtung des Ocularapparates eines Fernrohres (vorausgesetzt, dafs das Objectiv mit hinreichender Vollkommenheit construirt worden ist, um sehr weit gehende Vergröfserungen ohne

Verzerrung oder Färbung der Bilder vertragen zu können) allen Nutzen, dessen sie fähig ist, gewähren, so müssen die unveränderlichen Elemente des Oculars dergestalt gewählt werden, daſs die Steigerung der Vergröſserung möglichst weit gehen könne, d. h. daſs ihre Grenze jener, an welche die zum deutlichen Sehen erforderliche Lichtstärke gebunden ist, so nahe als möglich liege. Dieſs ist die Aufgabe, mit welcher sich, wie aus dem 51sten Bande von *Bode's* astronom. Jahrbuche, S. 177 erhellet, Dr. *Kitchiner*, wie es scheint auf practischem Wege, mit günstigem Erfolge beschäftiget hat, und die auch die Aufmerksamkeit der Theoretiker in vollem Maſse verdient.

Ohne von den Bemühungen der so eben genannten Männer unterrichtet zu seyn, widmete demselben Gegenstande seit längerer Zeit ein würdiger, mit der Naturlehre gründlich bekannter, und insbesondere in der practischen Optik durch eigene Übung in der Construction verschiedener optischer Apparate, ja selbst im Schleifen der Gläser und Spiegel erfahrener Mann einen Theil seiner Muſse. Der gegenwärtige Lector der Physik an der Hausstudienanstalt der nord-tiroler Kapuzinerprovinz, P. *Peter Gruber* zu Botzen, ein geborner Tiroler, eröffnete mir nämlich bereits im Sommer des Jahres 1821, als ich noch die Stelle eines Professors der Physik an dem damaligen Lyceum zu Innsbruck bekleidete, daſs er im Besitze mehrerer Methoden sey, ohne Wechselung der Oculargläser an den Fernröhren stufenweise fortschreitende Vergröſserungen zu erzielen, und hiedurch diesen Instrumenten eine gröſsere Wirksamkeit zu geben. Allein erst vor wenigen Monaten setzte er mich in nähere Kenntniſs der von ihm erdachten Einrichtungen der Fernröhre. Ich erlaube mir hier öffentlich anzuführen, daſs eine (und zwar nach meiner

Meinung die vorzüglichste) derselben mit *Kitchiner's* Vorrichtung übereinstimmt, und deſshalb dem oben genannten P. *Peter Gruber* gleichfalls die Ehre der Erfindung eines in mehrfacher Hinsicht nützlichen Apparates zugeschrieben werden darf.

Interessante Ankündigung

meines neuen Verzeichnisses, zweiter Theil, welcher in Kurzem die Presse verläſst. Dieses enthält die genaue Angabe der vollständigen Sammlung mathematischer, physikalischer und astronomischer Instrumente und Apparate, chemischer Geräthschaften und technologischer Modelle nach den neuern Einrichtungen und Verbesserungen verfertigt, welche im physikalischen Museum zu Frankfurt am Main aufgestellt sind, und die ich zu beigesetzten Preisen liefere. Dieses Verzeichniſs ist zum bequemen Nachschlagen systematisch geordnet, und stehet gegen portofreie Briefe Kennern und Liebhabern unentgeldlich zu Diensten.

Joh. Val. Albert.

Verbesserungen.

Seite	46	Zeile	18	statt:	vorige	lies:	unbestimmte
»	—	»	29	»	3, 4, 5	»	2, 3, 4
»	227	»	3 v. u.	»	*farbi*	»	*furbi*
»	364	»	14 v. u.	»	immer	»	niemals

Fig. 16.

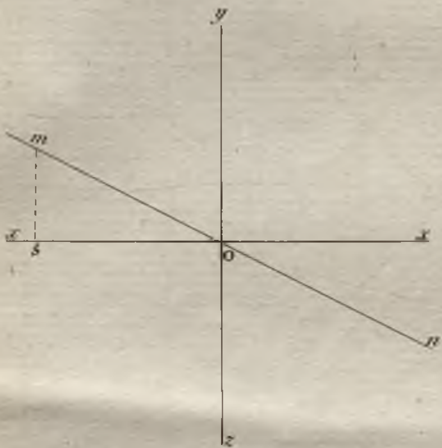


Fig. 17.

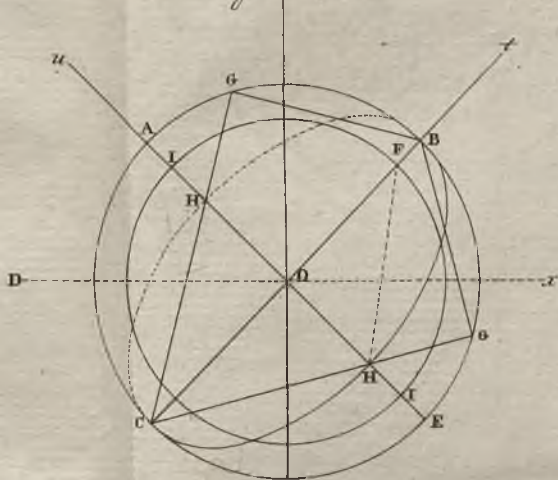


Fig. 18.

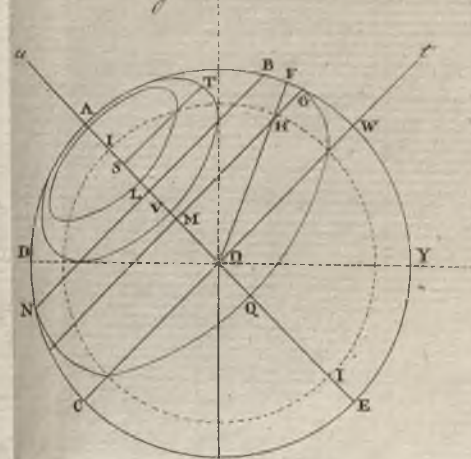


Fig. 19.

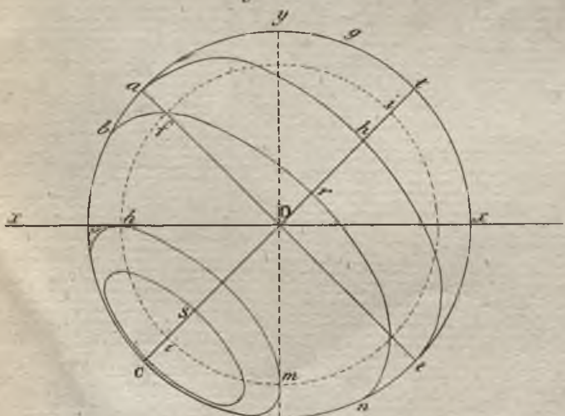


Fig. 20.

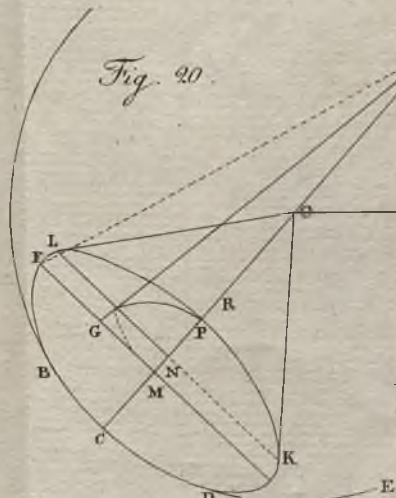
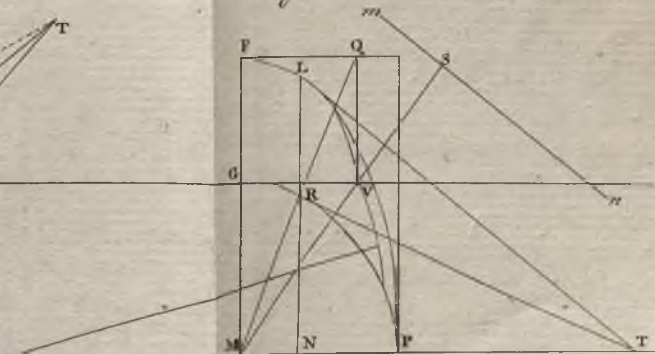


Fig. 21.



M. Bauer sc.

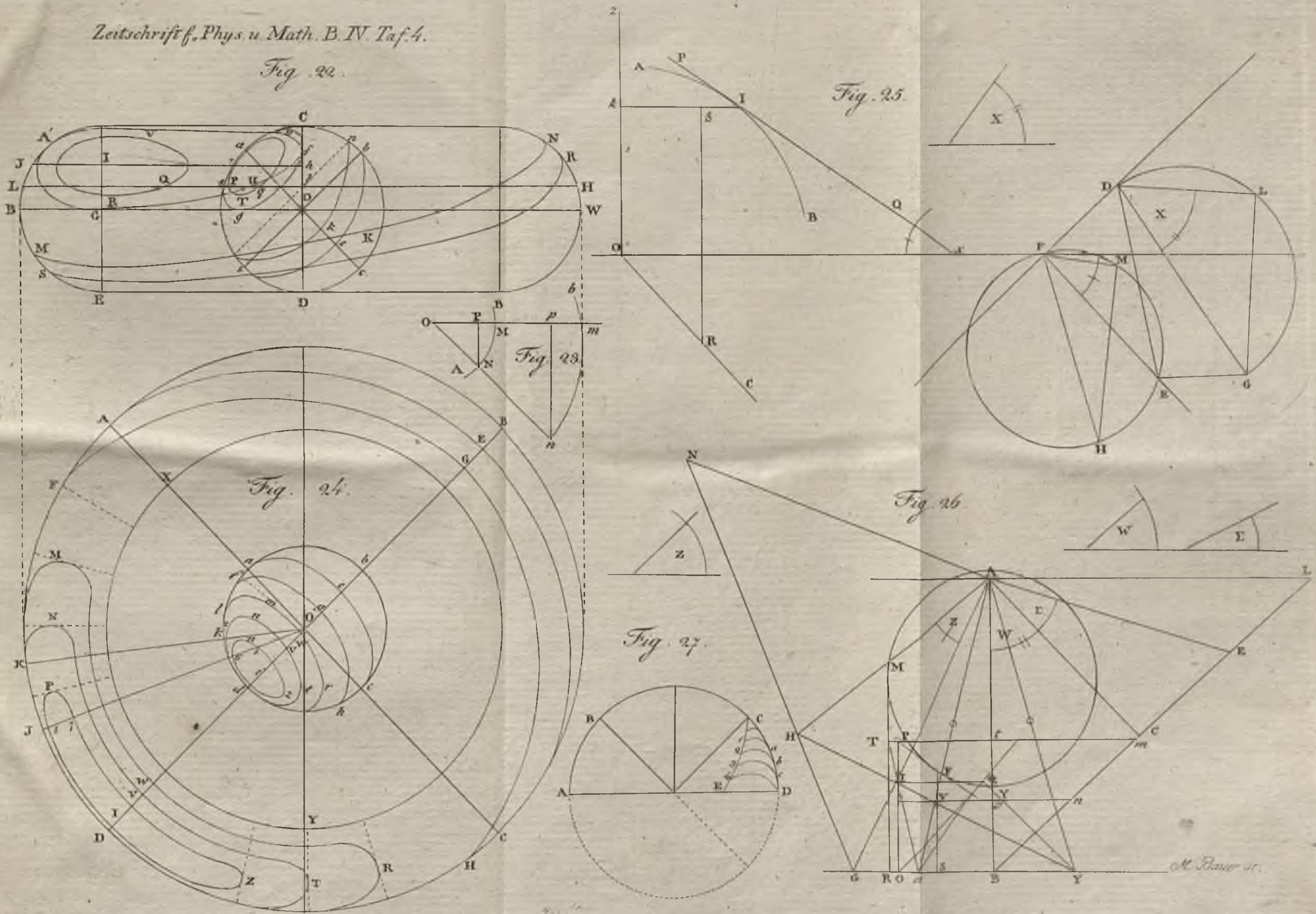


Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
M. Bauer sc.